Kilka prostych problemów matematycznych w ekonomii

Krzysztof MAZUR

Z podręczników szkolnych znamy na ogół zastosowania matematyki w fizyce. Ostatnio jesteśmy świadkami wielkiego wzrostu zainteresowania ekonomią. Ludzie poszukujący informacji na ten temat sięgają często do książek zachodnich, ponieważ w polskich króluje zwykle jeszcze ekonomia polityczna socjalizmu ze swymi „jedynie słusznymi" dogmatami. Zajrzawszy do zachodnich podręczników ekonomii przekonujemy się, jak bardzo wykładana tam ekonomia opiera się na matematyce. Często używa się w nich skomplikowanych metod opartych na rachunku prawdopodobieństwa i statystyce, aby móc uwzględnić czynnik ryzyka w działalności gospodarczej.

Przykłady, które poniżej przedstawiam, są jednak całkowicie elementarne i deterministyczne, tj. niezależne od czynnika losowego. Pierwszy dotyczy minimalizacji kosztów w przedsiębiorstwie. Jest to tzw. problem hurtownika:
Hurtownik ma magazyn, przez który w ciągu roku przewija się 3 000 ton jakiegoś towaru. Zamówienie nowej partii towaru kosztuje hurtownika 50 tys. zł (transport), przechowywanie towaru kosztuje go 30 tys. zł/tona × rok i jest proporcjonalne zarówno do czasu przechowywania, jak i do ilości towaru. Odbiór towaru przez sklepy odbywa się w tempie jednostajnym, tzn. w ciągu dnia sklepikarze odbierają 3 000/365 ton towaru. Jakiej wielkości dostawy i co jaki czas powinien hurtownik zamawiać, aby koszty były najmniejsze?

Wiemy ze szkoły, że zadania na minimum dobrze się rozwiązuje za pomocą pochodnej. Lecz najpierw, jak w każdym zadaniu z treścią, musimy napisać równanie na szukaną wielkość kosztu, abyśmy wiedzieli, co mamy minimalizować. Wprowadźmy więc następujące oznaczenia:
C – całkowite koszty roczne,
n – liczba dostaw w ciągu roku,
Q – wielkość każdej dostawy (założymy, że dostawy są równe, dlaczego – o tym będzie mowa później).

Łatwo zauważyć, że koszty poniesione przez hurtownika rozpadają się na dwie części: C_1 – koszty zamawiania nowych partii towaru i C_2 – koszty przechowywania. Widać też, że:

$$C_1 = 50 \text{ tys. zł} \cdot n$$

oraz

$$Q \cdot n = 3\,000 \text{ ton}.$$

Trochę więcej kłopotu sprawia składnik C_2. Nie jest on równy 30 tys. zł $\cdot\, Q$, jak mogłoby się wydawać, a to dlatego, że ilość towaru jest równa Q tylko w dniu dostawy, a potem już jednostajnie maleje.

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (III)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Pięćdziesięciolatek żyje już ponad sto lat i na pewno waży ponad sto kilogramów

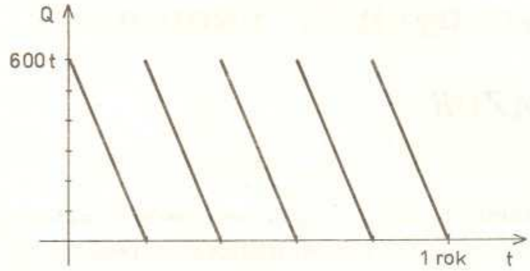
Tomasz HOFMOKL

W naszych spotkaniach staram się przedstawić Państwu wyniki doświadczeń, które przeczą temu, co na ogół uważamy za możliwe, czyli, innymi słowy, przeczą zdrowemu rozsądkowi. Poprzednio opowiedziałem o wynikach, które ponad wszelką wątpliwość pokazują, że prędkość światła, a ogólniej fali elektromagnetycznej w próżni, jest zawsze taka sama i nie zależy od ruchu źródła lub ruchu obserwatora – odbiornika. Fakt ten leży u podstaw szczególnej teorii względności Alberta Einsteina. Wynika z niej między innymi, że prędkość przesyłania sygnału nie może przekroczyć prędkości światła, czyli 299 792 458 m/s. Istnienie największej możliwej prędkości, jakkolwiek może budzić sprzeciw, nie jest bardzo trudne do przyjęcia. Tak już jest Wszechświat zbudowany i trudno. Z dużymi prędkościami nie spotykamy się w życiu codziennym, więc to ograniczenie naszych możliwości specjalnie nas nie boli. Czy aby na pewno? Jeżeli potrafimy uświadomić sobie wszystkie konsekwencje tego faktu, to już nie byłbym taki pewny. Postanowiłem, że w cyklu naszych pogadanek będę starał się omijać wywody teoretyczne, a odwołam się do najprostszych doświadczeń. Cóż może być prostszego niż pomiar czasu? Wiadomo, że do tego służy zegarek. Może nam sprawić nieco kłopotu pytanie, a co to jest zegarek, nie mówiąc już o pytaniu, co to jest czas. Obiecałem jednak chodzić po ziemi, a nie zajmować się teoretycznymi rozważaniami. Na nasze potrzeby wystarczy stwierdzenie, że upływ czasu wyznaczamy za pomocą zegarka. No, a sam zegar zdefiniujemy jako urządzenie, które po dokonaniu cyklu zmian wraca do stanu początkowego. Zegarem może być serce, a jednostką czasu jedno jego uderzenie. Może być nim nakręcany zegarek ze sprężyną balansową, może być wreszcie zegar kwarcowy albo zegar atomowy. Oczywiście, bicie serca nie jest zbyt dokładnym miernikiem. Najdokładniejszy, jak dotychczas, jest zegar atomowy. Można za jego pomocą osiągnąć dokładność pomiaru czasu rzędu 10^{-12} s.

Po tych wstępnych uwagach mogę już opowiedzieć o bardzo prostym doświadczeniu wykonanym w październiku 1971 roku. Postanowiono mianowicie sprawdzić, czy zegarek nieruchomy chodzi tak samo, jak zegarek w ruchu. Inaczej mówiąc, czy nasz zegarek, zakładając, że jest to idealny zegarek, powinien chodzić tak samo w jadącym tramwaju, jak schowany w szufladzie w domu. Dla wielu z Państwa samo postawienie takiego pytania wyda się bezsensowne. Czy upływ czasu może zależeć od tego, czy poruszamy się, czy nie? Do pojawienia się szczególnej teorii względności było oczywiste, że czas to czas, czyli że jest wielkością absolutną, taką samą wszędzie i nikt nie stawiał sobie pytania, czy upływ czasu może zależeć od jakichś warunków zewnętrznych. Oczywiście, nie mówimy o poczuciu czasu. Może nam się coś dłużyć, może czas biec szybko, ale rozumiemy przez to odczucia subiektywne dobrze wiedząc, że ten prawdziwy czas, odmierzany przez bezlitosne zegary, jest zawsze taki sam. Powiedziałem „dobrze wiedząc, że", a skąd my to dobrze wiemy? Jedynym źródłem naszej wiedzy jest doświadczenie. Przy małych prędkościach i dokładnościach pomiaru czasu spotykanych w życiu codziennym doświadczenie zdaje się potwierdzać przekonanie, że czas zawsze płynie jednakowo. A może to tylko wynik przybliżony, może czas wcale nie płynie zawsze jednakowo?

W październiku 1971 roku wysłano rejsowymi samolotami komunikacyjnymi cztery cezowe zegary atomowe w podróż dookoła świata. Raz zgodnie z kierunkiem obrotu Ziemi, czyli na wschód, a drugi raz na zachód. Wskazania zegarów porównywano ze wskazaniami zegarów odniesienia w U.S. Naval Observatory, czyli w amerykańskim obserwatorium floty. Nie będę opowiadał szczegółów eksperymentu i jak zabezpieczono się przed popełnieniem błędów doświadczalnych. Nie było to całkiem proste, bowiem spodziewano się różnic wskazań zegarów nieruchomych i podróżujących rzędu jednej stumilionowej części sekundy. Dlatego właśnie w podróż wysłano cztery niezależne zegary, które przed lotem, w przerwach lotu i po locie porównywano ze wskazaniami zegarów wzorcowych przez cały okres 636 godzin. Piloci rejestrowali przez cały czas lotu

Np. dla $n = 5$, $Q = 600$ ton wykres ilości towaru w magazynie wygląda tak:



Średnia ilość towaru w magazynie wynosi więc 300 ton $= \frac{Q}{2}$. Tak samo jest dla dowolnego innego n. Zatem $C_2 = 30\text{ tys.}\cdot\frac{Q}{2} = 15\text{ tys.}\cdot Q$. Stąd możemy zestawić już całościowy wzór na koszt

$$C = C_1 + C_2 = 50\text{ tys.}\cdot n + 15\text{ tys.}\cdot Q = \frac{50\text{ tys.}\cdot 3\,000}{Q} + 15\text{ tys.}\cdot Q$$

i stąd traktując C jako funkcję zmiennej Q każdy obliczy, jakie musi być Q, aby koszt był minimalny.

Przy rozwiązywaniu problemu hurtownika nasuwają się następujące spostrzeżenia:

1. Nie trzeba wcale używać pochodnej, by rozwiązać to zadanie. Wystarczy postawić sobie problem jako zadanie z parametrem M: dla jakiego parametru M nierówność

$$\frac{150\,000}{Q} + 15Q \geq M$$

zachodzi dla każdego $Q > 0$? Otóż

$$\frac{100}{Q} + \frac{Q}{100} \geq \frac{M}{1500} \quad \text{oraz} \quad \frac{100}{Q} + \frac{Q}{100} \geq 2,$$

a więc $M = 3000$.

2. W naszej analizie przyjęliśmy założenie, że najkorzystniej jest, jeśli wszystkie dostawy są równej wielkości. I to jest rzeczywiście prawda. Aby się o tym przekonać, rozważmy sytuację, w której mamy n dostaw w ciągu roku i wielkość i-tej dostawy jest x_i-tą częścią dostawy całorocznej. Oczywiście, będzie wtedy $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Dla takiego rozłożenia dostaw składnik C_2 będzie proporcjonalny do $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ (z jakimś współczynnikiem proporcjonalności), natomiast dla ciągu dostaw równych (każda w wysokości $\frac{1}{n}$ dostawy całorocznej) C_2 będzie proporcjonalny do $\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$ (z tym samym współczynnikiem). Składnik C_1 jest w obu przypadkach taki sam. Zatem, aby przekonać się, że najkorzystniejsza jest sytuacja, gdy dostawy są równe przez cały rok, wystarczy zauważyć, że:

$$\text{jeśli } x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \text{ i } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \text{ to}$$

$$(\clubsuit) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Można tego dowieść metodą wyrównywania wyrazów ciągu. Metoda ta polegać tu będzie na stopniowym wyrównywaniu wszystkich wyrazów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do $\frac{1}{n}$ i zauważeniu, że suma kwadratów cały czas maleje. Na koniec dochodzimy do sytuacji, w której wszystkie wyrazy są równe $\frac{1}{n}$ i nierówność ($\clubsuit$) staje się równością. Na czym zatem polegają poszczególne kroki tej metody?

Otóż załóżmy, że mamy taki ciąg liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Załóżmy ponadto, że nie wszystkie x_i są równe $\frac{1}{n}$. Wówczas istnieją co najmniej dwa takie wyrazy w tym ciągu, że jeden jest większy, a drugi mniejszy od $\frac{1}{n}$. Przenumerowując możemy założyć, że są to x_1 i x_2. W takiej sytuacji przerabiamy ciąg wyjściowy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na ciąg $x_1' = \frac{1}{n}$, $x_2' = x_1 + x_2 - 1/n$, $x_3' = x_3$, $x_4' = x_4, \ldots, x_n' = x_n$, w którym jest więcej wyrazów równych $\frac{1}{n}$. Trzeba jeszcze wykazać, że ciąg $(x_i')_{i=1}^n$ ma mniejszą sumę kwadratów. W tym celu wystarczy wykazać, że $x_1^2 + x_2^2 > (x_1')^2 + (x_2')^2$, czyli $(x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1^2 - x_2^2 < 0$. Proponuję podstawić za x_1' i x_2' to, co wyżej, a następnie lewą stronę powyższej nierówności przedstawić jako iloczyn dwóch wyrażeń o przeciwnych znakach. Zaznaczmy, że metoda wyrównywania może być użyta do dowodów bardzo wielu nierówności, np. między średnią arytmetyczną i geometryczną.

Tyle o problemie hurtownika. Tym z Czytelników, którym spodobało się zagadnienie minimalizacji kosztów w przedsiębiorstwie, polecam samodzielne rozwiązanie następującego problemu:
Mieszkańcy pewnego miasteczka wyrzucają tygodniowo 700 *pojemników śmieci. Tygodniowy średni koszt utrzymania pojemnika wynosi* 3 *tys. zł. Koszt kursu śmieciarki na wysypisko i z powrotem wynosi* 24 *tys. zł. Śmieciarka w czasie jednego kursu zabiera śmieci maksymalnie ze stu pełnych pojemników. Ile pojemników na śmieci trzeba ustawić w tym mieście, by (tygodniowe) całkowite koszty zakładu oczyszczania miasta były najmniejsze, a śmieci nie leżały na ulicach?*
Wskazówki:
1. Rozwiązywać problem osobno w każdym z przedziałów $(0, 100], (100, 200]$, itd. Liczby będące granicami przedziałów oznaczają tu liczby pojemników.
2. Wynik ma być liczbą całkowitą, tymczasem rozwiązanie, które dostaniemy przyrównując pochodną kosztów do zera, może nie być liczbą całkowitą. W tej sytuacji należy sprawdzić, dla której z dwóch najbliższych rozwiązaniu liczb całkowitych koszt jest mniejszy.

Przejdźmy teraz do zagadnień wymagających innych metod. Będą to metody związane z pochodną logarytmiczną opisującą tzw. tempo wzrostu danej wielkości. Pochodna logarytmiczna funkcji f jest to po prostu $f'/f = (\ln(f))'$ (ze wzoru na pochodną funkcji złożonej). Rozwiążmy następujące zadanie.
Niech na giełdzie papierów wartościowych dostępne będą akcje tylko dwóch firm zmieniające swoje ceny według wzoru $f_1(t) = 3 + \cos t$, $f_2(t) = 3 + \sin t$. *Ceny te są podane w dolarach. W jaki sposób należy grać na giełdzie w okresie* $[0, 2\pi]$, *aby zyskać najwięcej? Ile zyskamy do momentu* $t = 2\pi$ *zaczynając grę w momencie* $t = 0$ *z kwotą* 1000\$? *Gra na giełdzie polega na tym, że w dowolnym momencie możemy kupować bądź sprzedawać wybrane akcje lub też wycofać się z giełdy i trzymać pieniądze w domu.*

Gra w każdym z pierwszych trzech przedziałów $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$, $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ jest prosta, bo w każdym ze skrajnych przedziałów tylko jedna z tych funkcji rośnie, w środkowym zaś obie maleją.

wysokość i prędkość samolotu oraz dokładną trasę, aby można było potem obliczyć teoretycznie oczekiwane wskazania zegarów. Możemy śmiało zawierzyć, że J. C. Hafele z Washington University oraz Richard E. Keating ze służby czasu U.S. Naval Observatory dołożyli wszelkich starań, aby pomiary wykonać z największą możliwą starannością. Nas interesuje wynik. Otóż zegary w samolocie wskazywały inny upływ czasu niż zegary w obserwatorium. Nie jest ważny w tej chwili wynik liczbowy. Najważniejsze jest stwierdzenie, że czas inaczej płynie w układzie, który się porusza, a inaczej w spoczynku. Czas nie jest absolutny. Radzę dobrze się zastanowić nad tym wynikiem. Jest to całkowicie sprzeczne z niemal wrodzonym poczuciem, że czas to coś nieubłaganego, co stale upływa i nic na to nie możemy poradzić. Otóż tak nie jest.

Nie mogę twierdzić, że autorzy eksperymentu byli zaskoczeni. Przeciwnie, eksperyment był zaplanowany po to, aby sprawdzić w skali makroskopowej, w skali życia codziennego, no bo przecież samolot to niemal życie codzienne, przewidywania szczególnej teorii względności. Jakie były przewidywania teorii? Otóż mówi ona, że czas w układzie poruszającym się płynie wolniej w stosunku do czasu mierzonego w układzie nieruchomym. Inaczej mówiąc, jadąc tramwajem starzejemy się wolniej niż czekając na niego na przystanku. Zegar w tramwaju „chodzi" wolniej. Przewidywania teorii mówią o układach poruszających się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Doświadczenie z zegarami zostało wykonane w ruchu obrotowym wokół Ziemi. W tym przypadku zegara na ziemi nie można traktować jako nieruchomego, bowiem porusza się również z całą Ziemią w jej ruchu obrotowym. Dlatego przewidywania teorii trzeba zmodyfikować. Zegary podróżujące samolotem na wschód, czyli zgodnie z ruchem obrotowym Ziemi, będą się późnić, a zegary lecące na zachód będą się spieszyć względem zegara na ziemi. Na to nakładają się jeszcze inne zjawiska związane z polem grawitacyjnym Ziemi, o których mówi ogólna teoria względności, którą dzisiaj nie będziemy się zajmować. Otóż uwzględniając wszystkie znane nam czynniki możemy się spodziewać, że lecąc na wschód po takiej trasie, jaką samoloty przeleciały, zegary powinny się spóźnić o około 40 nanosekund. Jedna nanosekunda równa się jednej tysięcznej milionowej części sekundy. Przewidywanie to jest obarczone błędem wynikającym z niezbyt precyzyjnie znanych warunków lotu. Przypominam, że samolot był zwykłym samolotem komunikacyjnym i leciał po swojej zwyczajnej trasie, co komplikowało obliczenia. Opóźnienie może sięgać w tych warunkach do sześćdziesięciu kilku nanosekund. Z porównania wskazań zegarów okazało się, że spóźniły się o 59 nanosekund. Podobne rozważania prowadzą do wniosku, że zegary podróżujące na zachód powinny przyspieszyć w całej podróży o 275 nanosekund. W rzeczywistości przyspieszyły o 273 nanosekundy. Doświadczenie potwierdziło więc sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem wniosek, że czas płynie inaczej w układzie poruszającym się niż w układzie spoczynkowym.

Wybrałem dla Państwa to właśnie doświadczenie, bo jest ono zrealizowane w warunkach bardzo zbliżonych do warunków życia codziennego. Potwierdzenie wolniejszego upływu czasu w układach poruszających się spotykamy na każdym kroku w fizyce cząstek elementarnych, gdy przyspieszamy je do prędkości bliskich prędkości światła.

Zrozumienie faktu, że upływ czasu zależy od prędkości podróżowania, jest tak ważne, że zatrzymam się na doświadczeniu myślowym ilustrującym tak zwany paradoks bliźniąt. Dane liczbowe zaczerpnąłem z podręcznika *Wstęp do fizyki* autorstwa A. K. Wróblewskiego i J. A. Zakrzewskiego.

Oto prawdopodobna, lecz wymyślona, historia dwóch braci bliźniaków. Pierwszy został pilotem rakiety kosmicznej o najnowszym typie silnika fotonowego, który pozwala rozwinąć rakiecie prędkość podróżną 0,745 prędkości światła. Drugi pozostaje na Ziemi, jako kierownik kontroli lotów. Rakieta wyrusza z Ziemi do układu α Centaura. Zakładamy dla uproszczenia, że prędkość podróżną rakieta osiąga zaraz po starcie. To tylko uproszczenie obliczeń. Rakieta startuje 1 stycznia i bracia postanawiają przesłać sobie życzenia noworoczne drogą radiową. Można łatwo obliczyć, że sygnał wysłany z Ziemi po roku od chwili startu dotrze do rakiety po upływie około 2,6 roku od chwili startu według zegara w rakiecie. Także sygnał wysłany z rakiety po roku od chwili startu dotrze do brata bliźniaka na Ziemi również po upływie 2,6 lat od chwili startu według zegara na Ziemi. W pierwszej fazie lotu sytuacja jest więc symetryczna: każdy z braci bliźniaków stwierdza, że zegar jego brata idzie wolniej, bo brat porusza się względem odczytującego sygnały zegara. Mamy tu do czynienia ze względnością ruchu. Układ α Centaura jest najbliższym

Możemy naszą strategię zapisać symbolicznie:

$$0 \xrightarrow[\times\frac{4}{3}]{f_2} \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{wycofujemy się}} \pi \xrightarrow[\times\frac{3}{2}]{f_1} \frac{3}{2}\pi$$

1000\$ 1333,(3)\$ 1333,(3)\$ 2000\$

Najciekawsza sytuacja jest w przedziale $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$, bo tam zarówno f_1, jak i f_2 rosną. Trzeba się zatem zdecydować na wybór tej funkcji, która w danym momencie daje lepszy zysk. Normalnie za lepsze (przynoszące większy zysk) uważa się te akcje, dla których iloraz $\frac{f(t+h)-f(t)}{f(t)}$ jest największy, gdzie t – czas poprzedniej sesji, $t+h$ – czas ostatniej sesji, h – odległość między sesjami. Jednak zamiast badać, który z ilorazów: $\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{f_1(t)}$ czy $\frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{f_2(t)}$ jest większy, możemy podzielić oba przez h, przejść do granicy przy $h \to 0^+$ otrzymując nowe ilorazy $\frac{f_1'(t)}{f_1(t)}$ oraz $\frac{f_2'(t)}{f_2(t)}$ i wybrać większy z nich. Rozwiążmy zatem w przedziale $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ nierówność:

$$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} \geq \frac{f_2'(t)}{f_2(t)}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{-\sin t}{3+\cos t} \geq \frac{\cos t}{3+\sin t},$$
$$-\sin t\cdot(3+\sin t) \geq \cos t\cdot(3+\cos t),$$
$$-3(\sin t+\cos t) \geq \cos^2 t+\sin^2 t = 1,$$
$$\sin t+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \leq -\frac{1}{3},$$
$$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{3},$$
$$\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Zatem patrząc na wykres funcji cos widzimy, jak mamy postępować w przedziale $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. W chwili $\frac{3}{2}\pi$ mamy akcje f_1. Tak trwamy aż do chwili t, dla której $\cos(t-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$. W tym momencie akcje f_1 zamieniamy na f_2 i przy tym trwamy już do końca. Obliczenie całkowitego zysku przy tej optymalnej strategii pozostawiamy Czytelnikom.

Podobnym zagadnieniem jest słynny problem składowania wina: *Ktoś zajmuje się produkcją wina, którego wartość w czasie zmienia się według wzoru*

$$W(t) = e^{\sqrt{t}}W_0,$$

gdzie t jest czasem mierzonym w latach. Załóżmy, że roczne oprocentowanie kapitału w banku wynosi 15%. Jak długo trzeba trzymać wino w beczkach i kiedy należy je sprzedać, by zarobić na tym najwięcej?

Proponuję rozwiązać to zadanie samodzielnie, gdyż jest analogiczne do poprzedniego.

Rozwiązania quizu z *EPSILONA*:

Pierre, Diofantos (*Arytmetyka*), prawnikiem, Leonhard Euler, w markach niemieckich (w wysokości 100 000, ale ta nagroda dawno już się zdewaluowała), Riemann, *Szatan z siódmej klasy*, gdyż jest ostatnim jeszcze nie udowodnionym spośród tych, które Fermat zostawił bez dowodu potomnym, 1987, Mordella.