7/92
(17)

O twierdzeniu Fermata trochę inaczej

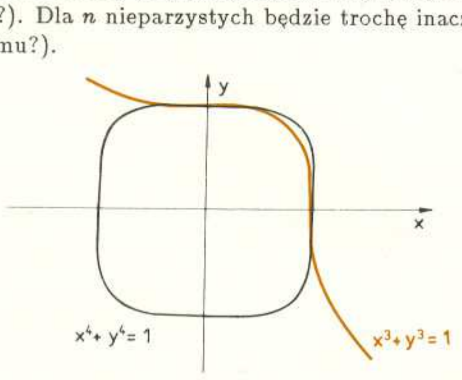
Wielkie Twierdzenie Fermata jest jednym z najpopularniejszych tematów matematycznych. Wiadomo: mówi ono o równaniu $a^n + b^n = c^n$; w XVII wieku Fermat napisał na marginesie książki uwagę, że dla $n > 2$ równanie to nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, i że znalazł zadziwiający dowód tego twierdzenia, ale margines książki jest zbyt mały, by ten dowód zmieścić. Notatka ta (wraz z wieloma innymi) została odnaleziona po śmierci Fermata – i do dziś nie wiadomo, czy twierdzenie jest prawdziwe, choć sprawdzono np., że dla $n \leq 150\,000$ równanie istotnie nie ma rozwiązań.

Z reguły myślimy o Wielkim Twierdzeniu Fermata wyłącznie „w kategoriach" liczb całkowitych. Można jednak spojrzeć na nie inaczej – od strony geometrycznej. Jak? Dzieląc równanie stronami przez c^n otrzymujemy $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$. Liczby a, b, c są całkowite, więc odpowiednie ułamki są liczbami wymiernymi; można zatem twierdzenie sformułować następująco:

dla $n > 2$ krzywa na płaszczyźnie, opisana wzorem $x^n + y^n = 1$, przecina zbiór $\mathbf{Q}^2$ tylko w punktach na osiach współrzędnych (dwóch lub czterech, w zależności od n).

Przez $\mathbf{Q}^2$ oznaczamy zbiór punktów płaszczyzny, których obie współrzędne są wymierne. Wiadomo, że $\mathbf{Q}^2$ jest położony na płaszczyźnie „gęsto"; twierdzenie mówi zatem, że odpowiednie krzywe przebiegają na płaszczyźnie tak chytrze, iż poza osiami ten gęsty zbiór omijają.

Stosunkowo łatwo jest wyobrazić sobie, jak owe krzywe wyglądają. Dla n parzystych będą – przy zwiększającym się n – coraz bardziej przybliżać się do kwadratu o boku 2 (dlaczego?). Dla n nieparzystych będzie trochę inaczej (jak? czemu?).



Właśnie geometrycznie patrzył na ten problem Gerd Faltings. Wykazał on w 1983 roku, że jeśli równanie Fermata dla ustalonego $n \geq 4$ ma pierwiastki całkowite, to może ich mieć jedynie skończenie wiele. Oczywiście, należy tę „skończoność" odpowiednio rozumieć: jasne, że gdy liczby a, b, c spełniają to równanie, to liczby ka, kb, kc też (dla dowolnego k) – mówiąc o wyniku Faltingsa rozwiązania takie traktujemy jako jedno. Utożsamienie tych rozwiązań jeszcze lepiej widać dzięki modelowi geometrycznemu. Istotnie, gdy popatrzymy na nie jak na punkty płaszczyzny, stwierdzimy, że przedstawiają one ten sam punkt. Faltings udowodnił po prostu, że krzywa dana przez równanie Fermata ma (dla danego n) z $\mathbf{Q}^2$ wspólną co najwyżej skończoną liczbę punktów. Dokładnie, Faltings udowodnił hipotezę ogólniejszą – wykazał, że własność tę ma pewna liczna rodzina krzywych, a krzywa określona przez „$x^n + y^n = 1$" jest jedną z nich.

Korzystając z rezultatu Faltingsa, D.R. Heath-Brown wykazał w 1987 roku, że twierdzenie Fermata jest, mówiąc potocznie, prawdziwe dla „prawie wszystkich" n. Precyzyjniej: gdy n dąży do nieskończoności, to ułamek $\frac{k}{n}$, gdzie k jest liczbą tych wykładników mniejszych lub równych n, dla których twierdzenie Fermata jest prawdziwe, dąży do 1. Wynik ten daje informacje innego typu niż twierdzenie Faltingsa: Faltings dowiódł, że rozwiązań jest „mało" dla danego n, Heath-Brown zaś, że „mało" jest takich n, dla których rozwiązania istnieją. Może ktoś kiedyś w końcu wykaże, że „mało" oznacza tu „nie ma wcale"...

Krzysztof CIESIELSKI

Quiz

Wydaje się, że Wielkie Twierdzenie Fermata jest tematem tak „oklepanym", iż wiemy o nim prawie wszystko. Wszystko chyba nie, bo, być może, nie pamiętamy, kiedy Dirichlet udowodnił je dla $n = 14$ czy też których trzech liczb pierwszych mniejszych od 100 nie obejmował dowód Kummera w 1859 roku; również nie potrafilibyśmy zapewne tych dowodów z pamięci odtworzyć. Ale informacje bardziej ogólne są nam świetnie znane... Czy istotnie tak jest? Spróbujmy zatem rozwiązać mały test – zabawę: 10 pytań związanych z tym tematem. Odpowiedzi na str. 15 *Delty*.

1. Jak Fermat miał na imię?
2. Kto był autorem książki, na marginesie której zapisał Fermat swoją słynną uwagę?
3. Kim Fermat był z zawodu?
4. Kto udowodnił Wielkie Twierdzenie Fermata w przypadku $n = 3$?
5. W jakiej walucie Paul Wolfskehl (zmarły w roku 1907) zapisał w testamencie nagrodę temu, kto udowodni Wielkie Twierdzenie Fermata?
6. Euler, Lagrange, Gauss, Riemann – tylko jeden z tych czterech wielkich matematyków nie jest autorem błędnego dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata. Który?
7. W jakiej książce Kornela Makuszyńskiego opisana jest historia twierdzenia?
8. Dlaczego w języku angielskim twierdzenie nosi nazwę Ostatniego Twierdzenia Fermata (*Fermat's Last Theorem*)?
9. W którym roku J. Tunner udowodnił twierdzenie dla $n \leq 150\,000$ (wolno się pomylić o 5 lat)?
10. Czyje imię nosi hipoteza, rozwiązana przez Gerda Faltingsa, z której wynika, że dla danego n rozwiązań jest skończenie wiele?

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.