na ich orbitach. Ruch satelitów i spadek swobodny ciał był z kolei wywoływany przez mniejsze wiry, których środkami były planety.

Huygens był chyba jedynym poza Newtonem matematykiem tego okresu zdolnym do wykazania, że siła centralna odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka wywołuje ruch po przecięciach stożkowych. Po ukazaniu się *Zasad* nie mógł, oczywiście, zaprzeczyć ścisłości dowodów matematycznych Newtona, ale nadal nie pogodził się z ideą ciążenia powszechnego.

Historycy nauki są obecnie zgodni co do tego, że to Hooke pierwszy spojrzał inaczej na zagadnienie ruchu planet. Najwcześniejsza zanotowana o tym wiadomość pochodzi z 1666 r., gdy 23 maja Hooke przedstawiał na posiedzeniu Royal Society swą pracę o ruchu ciał po linii krzywej. Mówił wtedy, że „ruch po okręgu jest wynikiem złożenia tendencji do ruchu prostoliniowego po stycznej oraz skłonności dążenia do środka..."

Gdy patrzymy dziś z perspektywy trzech stuleci na Newtona i Hooke'a, zdaje się nie ulegać wątpliwości, że Hooke został potraktowany niesprawiedliwie. Na pewno nie był on w stanie – nie będąc matematykiem – rozwiązać ilościowo zagadnienia ruchu planet. Ale Newton zawdzięczał Hooke'owi wiele. Zresztą sam w przypływie lepszego humoru przyznał się Halleyowi, że listy Hooke'a (1679 – 1680) zwróciły jego uwagę na zagadnienie ruchu planet. Trudno powiedzieć, jak potoczyłyby się wydarzenia, gdyby Hooke nie wskazał Newtonowi nowego podejścia do analizy ruchu krzywoliniowego. Wszak Newton większą część czasu poświęcał na prace alchemiczne oraz studia historyczne i teologiczne, z których zresztą niewiele wynikło. Czy bez impulsu otrzymanego od Hooke'a zająłby się ponownie mechaniką nieba ? Mógłby więc bez uszczerbku dla swej wielkości dać satysfakcję Hooke'owi choćby drobną wzmianką w tekście *Zasad*. Tego jednak nie zrobił.

Jak obliczyć π?

Udowodnimy, że

$$2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{dwójek}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi .$$

Dowód tego faktu będzie bardzo elementarny.

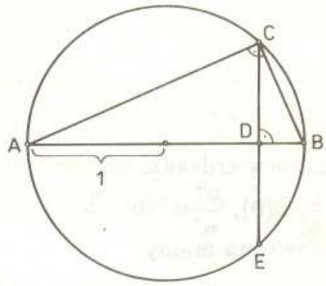
Niech W_m oznacza m-kąt foremny wpisany w koło o promieniu 1. Wówczas, oczywiście,

$$\text{obwód } W_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \text{obwód koła} = 2\pi .$$

Mając wielokąt W_m konstruujemy wielokąt W_{2m} w sposób następujący: Wierzchołki wielokąta W_m dzielą okrąg na m łuków. Łącząc środki tych łuków z wierzchołkami wielokąta W_m otrzymamy wielokąt W_{2m}.

Niech a_m oznacza długość boku wielokąta W_m. Łatwo zauważyć, że $a_4=\sqrt{2}$. Wobec tego $a_m<\sqrt{2}$ dla $m>4$.

Lemat. $a_{2m}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_m^2}}$.



Dowód. Niech $|CE|=a_m$.
Pole trójkąta ABC wynosi

$$\frac{1}{2}|AC||BC|=\frac{1}{2}|AB||CD| .$$

Podstawiając

$$|AC|=\sqrt{|AB|^2-|BC|^2}=\sqrt{4-a_{2m}^2} ,$$

$$|BC|=a_{2m} ,$$

$$|AB|=2 ,$$

$$|CD|=\frac{1}{2}a_m ,$$

otrzymamy

$$\frac{1}{2}\sqrt{4-a_{2m}^2}\,a_{2m}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}a_m ,$$

więc

$$a_m^2=a_{2m}^2(4-a_{2m}^2) .$$

Oznaczając $x=a_{2m}^2$ otrzymamy równanie kwadratowe

$$x^2-4x+a_m^2=0 ,$$

skąd

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4a_m^2}}{2} .$$

Ponieważ $2m>4$, więc $a_{2m}^2<2$ i rozwiązanie z „plusem" odrzucamy. Wobec tego

$$a_{2m}^2=\frac{4-\sqrt{16-4a_m^2}}{2} ,$$

$$a_{2m}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_m^2}} .$$

Wykorzystamy teraz ten lemat do rekurencyjnego obliczenia a_{2^m}. Otóż, jak wiemy,

$$a_4=\sqrt{2} ,$$

skąd

$$a_8=\sqrt{2-\sqrt{4-\sqrt{2}^2}}=\sqrt{2-\sqrt{2}} ,$$

$$a_{16}=\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} ,$$

itd.

Kontynuując tę procedurę obliczania otrzymamy w końcu

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{dwójek}}},$$

skąd

$$\text{obwód } W_{2^{n+1}} = 2^{n+1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{dwójek}}} \to 2\pi.$$

I ostatecznie dzieląc przez 2 mamy

$$2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{dwójek}}} \to \pi.$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli $|BC| = a_{2^{n+1}}$, to

$$|AC| = \sqrt{4-a^2_{2^{n+1}}} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{dwójek}}}$$

Ponieważ $a_{2^{n+1}}$ jest bardzo małe przy bardzo dużym n, więc $|AC|$ jest bardzo bliskie 2, czyli

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{dwójek}} \to 2,$$

co często symbolicznie zapisuje się w postaci

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2.$$

Opracował Piotr HAJŁASZ

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 634. Wielomian $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ o nieujemnych współczynnikach a_j ma n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wtedy $P(k) \geq (k+1)^n$ dla dowolnej liczby naturalnej k.
Rozwiązanie na str. 11

M 635. Gracz A rzuca symetryczną monetę $n+1$ razy, gracz B zaś n razy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że A uzyska więcej orłów niż B?
Rozwiązanie na str. 11

M 636. Udowodnić, że jeśli liczby naturalne a, b, c, n $(n \geq 2)$ spełniają równanie $a^n + b^n = c^n$, to $\min(a, b) > n$.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Jarosław KULPA

F 335. Ciężarek zawieszono na sprężynie o znanym współczynniku sprężystości. Na podstawie analizy ruchu harmonicznego, zakładając nieważkość sprężyny, wyznaczono masę ciężarka. Po zważeniu ciężarka okazało się, że jego masa jest mniejsza o Δm. Oceń, jaka była masa sprężyny?
Rozwiązanie na str. 10

F 336. Jaka temperatura ustaliłaby się na powierzchni Ziemi, gdyby nagle zgasło Słońce? Gradient temperatury w głąb Ziemi wynosi 25°C na 1 km, a współczynnik średniego przewodnictwa cieplnego zewnętrznych warstw Ziemi wynosi $\lambda \approx 10$ W/(m·K).
Rozwiązanie na str. 10

Następne pokolenia fizyków rozwijały i udoskonalały mechanikę Newtona. Jak powiedzieliśmy, *Zasady* były dziełem pisanym w języku geometrii, nie ma więc w nich np. tego, co dziś nazywamy równaniami Newtona. Drugie prawo dynamiki Newtona w postaci różniczkowej podał po raz pierwszy Jacob Herman w 1716 r. Leonhard Euler zrobił poważny krok w kierunku przedstawienia fizyki Newtona w języku matematycznym Kartezjusza i Leibniza. Gdy Joseph Louis de Lagrange opracował swą mechanikę analityczną, mógł już z dumą oświadczyć w przedmowie: „W tej książce nie ma w ogóle rysunków. Metody, jakie tu przedstawiam, nie wymagają ani konstrukcji, ani rozważań geometrycznych ..."

Newton dokonał ogromnego dzieła. Oczywiście, wykorzystywał to, co przed nim znaleźli Galileusz, Kartezjusz, Kepler, Hooke i Huygens, choć nie zawsze to przyznawał. Nawet Newton, gdyby urodził się kilkadziesiąt lat wcześniej, nie zdołałby chyba sam zbudować swego systemu. Ale Newton nie zapożyczał po prostu od swoich poprzedników, lecz ich odkrycia i pomysły twórczo przetworzył i połączył w jedną spójną całość. Stał na ramionach gigantów, jednak przewyższył ich ogromem swego intelektu. Lagrange wyraził się o Newtonie, że był najszczęśliwszym z ludzi, gdyż istnieje tylko jeden świat i tylko jeden człowiek mógł ustalić prawa nim rządzące.

Gdy Newton zmarł 20 III 1727 roku, wyprawiono mu wspaniały pogrzeb z udziałem Lorda Kanclerza, wielu książąt i hrabiów. Pochowano go w katedrze Westminster, a długie epitafium na wspaniałym grobowcu kończy się słowami: *Sibi gratulentur mortales, tale tantumque exstitisse humani generis decus* – Niech się radują śmiertelni, że istniała taka ozdoba rodzaju ludzkiego.

Są to fragmenty większego artykułu zamieszczonego w *Postępach Fizyki*, 1987, tom 38, zeszyt 4, str. 315-343.