

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 335. Niech μ oraz m oznaczają masę sprężyny i ciężarka. Całkowita energia

drgań ciężarka wynosi $E_1 = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}$, gdzie ω oznacza częstotliwość drgań, x_0 zaś maksymalne wychylenie ciężarka. Zakładając jednorodny rozkład masy sprężyny możemy obliczyć jej całkowitą energię drgań

$$E_2 = \frac{\omega^2}{2} \int_0^{x_0} \mu x^2 dx = \frac{\mu x_0^2 \omega^2}{6}.$$

Porównując $E_1 + E_2$ z energią drgań w ruchu harmonicznym $E = \frac{kx_0^2}{2}$ otrzymujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(1/3)\mu + m}}.$$

Stąd pozorny przyrost masy ciężarka $\Delta m = \frac{1}{3}\mu$. Ostatecznie otrzymujemy $\mu = 3\Delta m$.



Rozwiązanie zadania F 336.

Oznaczmy gradient temperatury przez λ . Obliczmy energię, jaka wydobywa się z głębi Ziemi na metr kwadratowy powierzchni: $E = \lambda x = 0,25 \text{ W/m}^2$. Choć po zgaśnięciu Słońca zmieni się rozkład temperatur oraz przewodnictwo cieplne, strumień energii wydobywający się na powierzchnię musi być ten sam, albowiem ma on swoje źródło w procesach promieniotwórczych zachodzących w głębi Ziemi.

Potraktujmy Ziemię jako ciało doskonale czarne o temperaturze T . Z prawa Stefana-Boltzmann'a oraz z warunków równowagi mamy $\sigma T^4 = \lambda x \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\lambda x}{\sigma}} = 45 \text{ K}$.

Rozmiary krytycznej powierzchni Roche'a zależą od odległości składników układu podwójnego: są tym większe im większa jest odległość składników. Często są one mniejsze niż rozmiary, jakie osiągnęłyby masywna gwiazda w stadium czerwonego olbrzyma, gdyby była samotna. Dlatego dążąc do tego stadium w trakcie ewolucji musi ona wtedy tracić część swoich zewnętrznych warstw na rzecz towarzysza.

Obserwacje spektroskopowe są potężnym narzędziem badania składu chemicznego ciał niebieskich – niestety, w przypadku gwiazd bada się bezpośrednio tylko zewnętrzne warstwy gwiazd, skąd pochodzi promieniowanie odbierane przez obserwatora. Wnętrze gwiazdy pozostaje niedostępne obserwacjom w jakimkolwiek zakresie promieniowania elektromagnetycznego. Dlatego tak wielką wagę przywiązuje się do obserwacji strumienia neutrin, pochodzących, jak wiadomo, nawet z samego centrum gwiazdy (prawdę powiedziawszy, na razie obserwuje się systematycznie neutrina jedynie słoneczne). Wszechświat przejawia jednak tak wielką różnorodność zjawisk, że w niektórych przypadkach umożliwia obejrzenie składu chemicznego centralnych części gwiazdy. Jednym z obiektów oferujących tę szansę jest druga co do jasności gwiazda Lutni, β *Lyrae*.

Jest ona doskonale widoczna gołym okiem (3,4 mag) i jest gwiazdą zmienną. Jej zmienność odkrył w 1784 r. John Goodricke, odkrywca zmienności Algola (jest to gwiazda podwójna zaćmieniowa). Przez następne lata coraz bardziej stawało się widoczne, że o ile Algol jest przedstawicielem licznej grupy gwiazd (zob. Joanna Udalska, *Paradoks Algola*, *Delta* 2/1985), to β *Lyrae* jest obiektem wyjątkowym. Analiza krzywej jasności sugeruje, że jest to gwiazda także zaćmieniowa, której składnik główny (jaśniejszy i dający głębsze minima jasności) jest gorącym olbrzymem typu B8. Jego widmo ulega okresowym przesunięciom, co standardowo tłumaczy się efektem Dopplera, a co za tym idzie – ruchem orbitalnym gwiazdy. Niezwykle jest przy tym, że składnik główny jest zarazem obiektem mniej masywnym w układzie. Co więcej, wydłużanie się okresu zmienności (wynoszącego około 12,9 dni) dowodzi, że ten właśnie mniej masywny składnik traci masę. Według najnowszych oszacowań składnik główny i wtórny mają odpowiednio 2 i 12 mas Słońca. Gaz przepływający ze składnika głównego do wtórnego, jako obdarzony znacznym momentem pędu, nie spada na gwiazdę bezpośrednio, lecz tworzy wokół niej dysk, z którego dopiero z opóźnieniem jest przez nią akreowany. Obecność grubego dysku tłumaczyłaby tu fakt, że składnik wtórny (ten masywniejszy) nie jest widoczny.

Tu wypada podkreślić, dlaczego właściwie taki model gwiazdy podwójnej jest wyjątkowy. Otóż aby gwiazda mogła tracić masę na rzecz swojej towarzyszki, musi stać się tak wielka, że niemal wypełni swoją materią tzw. krytyczną powierzchnię Roche'a (jest to taka powierzchnia ekwipotencjalna, która odpowiadałaby najmniejszej energii i jednocześnie obejmowała obie gwiazdy, przy czym na tę energię potencjalną ma składać się energia grawitacyjna i energia ruchu obrotowego w tempie takim, w jakim obiegają się te dwie gwiazdy). Kłopot w tym, że to masywniejsza gwiazda ewoluuje szybciej, a więc ona jako pierwsza osiąga stadium olbrzyma i wypełnia swoją część krytycznej powierzchni Roche'a. Jakim więc prawem w układzie β *Lyrae* masę traci składnik lżejszy?

Wydłużanie się okresu jest równoznaczne ze wzrastaniem odległości składników układu podwójnego. Oznacza to, że w przeszłości, gdy gwiazdy stanowiły parę znacznie ciasniejszą, składnik masywniejszy nie miał możliwości stać się w pełni rozwiniętym olbrzymem, gdyż krytyczna powierzchnia Roche'a była dla niego za ciasna. Materia jego zewnętrznych warstw w znacznej ilości musiała już dawno przepłynąć do gwiazdy towarzyszącej. To, co teraz widzimy jako olbrzyma typu B8, jest w rezultacie pozostałością po kiedyś masywniejszej gwiazdzie, praktycznie – jądrem dawnej gwiazdy. β *Lyrae* powinna się wobec tego różnić od innych gwiazd typu B8, np. pod względem składu chemicznego.

Każda gwiazda w chwili powstania jest jednorodna chemicznie i jej skład odpowiada składowi chemicznemu materii międzygwiazdowej: na 10 atomów wodoru powinien przypadać jeden atom helu i śladowe ilości innych

Cykl CNO – ogół reakcji termojądrowych prowadzących do przemiany wodoru w hel z udziałem atomów węgla C, azotu N i tlenu O jako katalizatorów poszczególnych reakcji. Początkowa zawartość CNO w gwiazdzie, określona przez skład materii międzygwiazdowej, na ogół nie jest optymalna dla cyklu CNO. Wtedy katalizator obecny w nadmiarze będzie szybciej zużywany niż odtwarzany, i odwrotnie będzie się działo z katalizatorem deficytowym. Sytuacja ustabilizuje się, gdy proporcje katalizatorów osiągną wartości optymalne dla całej reakcji, tzn. gdy każdy z katalizatorów będzie w tym samym tempie zużywany co odtwarzany.



Rozwiązanie zadania M 684.

Z uwagi na znak współczynników wielomianu P wszystkie pierwiastki muszą być ujemne (bo jeśli $x \geq 0$, to $P(x) > 0$). Zatem możemy zapisać $P(x) = (x + \gamma_1)(x + \gamma_2) \dots (x + \gamma_n)$, $\gamma_j > 0$ dla wszystkich j . Posługując się nierównością między średnią arytmetyczną i geometryczną widzimy, że

$$k + \gamma_j = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ składników}} + \gamma_j \geq \geq (k+1) k + \sqrt[1 \dots \dots 1 \cdot \gamma_j]{k} = (k+1) k + \sqrt[1 \dots \dots 1 \cdot \gamma_j]{k}$$

Ze wzorów Viete'a wynika, że $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = 1$, jeśli więc pomnożymy uzyskane nierówności dla $j = 1, 2, \dots, n$ stronami, to dostaniemy tęzę zadania.



Rozwiązanie zadania M 685.

Łatwo zauważyć, że zawsze albo A uzyska więcej orłów niż B , albo A uzyska więcej reszek niż B . Ponieważ zdarzenia te są jednakowo prawdopodobne i rozłączne, więc prawdopodobieństwo tego, że A uzyska więcej orłów niż B jest równe $\frac{1}{2}$.



Rozwiązanie zadania M 686.

Niech $a \geq b$ i przypuścmy, że $n \geq b$. Ponieważ $a^n + b^n = c^n$, to, oczywiście, $a < c$. Z drugiej strony $(a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \dots + 1 > > a^n + na^{n-1} \geq a^n + ba^{n-1} \geq \geq a^n + b^n = c^n$, zatem $a^n < c^n < (a+1)^n$, czyli $a < c < a+1$, a to oznacza, że c nie jest liczbą całkowitą.

pierwiastków. W trakcie tocących się później w gwiazdzie reakcji termojądrowych w jądrze ubywa wodoru, a przybywa helu (w większości gwiazd materia jądra nie miesza się z materią otoczką). Ale nie tylko na tym polega zmiana składu chemicznego. Węgiel, azot i tlen (C, N, O) są wprawdzie tylko katalizatorami cyklu CNO, jednak ich początkowa zawartość jest „kosmiczna”, a nie taka, jaka najbardziej odpowiadałaby temu cyklowi. W rezultacie ich względna ilość ulega zmianie w trakcie ewolucji gwiazdy. W materii międzygwiazdowej stosunek liczby atomów C:N:O wynosi 33:7:60, natomiast po zużyciu wodoru (tj. po zakończeniu ewolucji na ciągu głównym) ich proporcje ustalają się jako 2:95:3. I taki mniej więcej skład chemiczny powinny ujawnić obserwacje, o ile nasze przypuszczenia co do natury β *Lyrae* są słuszne.

Skrupulatne badania składu chemicznego β *Lyrae* zapoczątkował w 1959 r. A.A. Bojarczuk. Według niego stosunek liczby atomów helu i wodoru wynosi 20, czyli o dwa rzędy więcej niż w materii międzygwiazdowej (0,1). Co prawda, późniejsze pomiary znacznie ten wynik obniżyły (do wartości poniżej 2), za to wykryto nadobfitość azotu, ale z kolei nie dało się wyznaczyć zawartości węgla. Niemniej jednak w mocy pozostał wniosek, że skład naszej gwiazdy jest nietypowy i można podejrzewać, że charakteryzuje on głębokie warstwy normalnych gwiazd. Sprawa była na tyle interesująca, że kilka lat temu wykonane zostały w Obserwatorium McDonalda nowe obserwacje widmowe 2,7-metrowym teleskopem z zastosowaniem nowych technik. Obserwacje te potwierdziły, że stosunek ilości helu do wodoru wynosi 1,5. Potwierdziły też brak linii neutralnego i jednokrotnie zjonizowanego węgla, z czego wynika, że pierwiastka tego jest w gwiazdzie 25 razy mniej niż w materii międzygwiazdowej. Wreszcie względna zawartość azotu okazała się 16 razy wyższa, a tlenu 20 razy niższa od wartości normalnej. Tak więc rzeczywiście stwierdzono charakterystyczny nadmiar azotu przy jednoczesnym niedoborze węgla i tlenu.

Jak więc zajrzeć do wnętrza gwiazdy? To proste, wystarczy usunąć z niej tyle materii z wierzchu, ile trzeba. Jak widać, takie eksperymenty z gwiazdami przyroda robi sama. Przepływ masy wymuszany jest obecnością drugiej gwiazdy w pobliżu. Ocenia się, że w przypadku β *Lyrae* maksimum natężenia przepływu układ przeżył zaledwie 60 000 lat temu. Składnik wtórny, ten masywniejszy, jest teraz niewidoczny, ponieważ zasłania go dysk akrecyjny – tak się bowiem widocznie składa, że Ziemia znajduje się blisko płaszczyzny tego dysku. Gdy za kilkadziesiąt tysięcy lat przepływ materii ustanie, dysk się rozproszy i masywny składnik stanie się widoczny. Składnik zwany nadal głównym zacznie palić w centrum hel, skurczy się i materialny kontakt między składnikami na jakiś czas zostanie zerwany. Po kilku milionach lat składnik główny znowu spęcznieje (bo ewolucja na etapie palenia helu przebiega dość szybko) i rozpocznie się ponownie przepływ – tym razem praktycznie helu – do gwiazdy masywniejszej. Ale tymczasem gwiazda masywniejsza wreszcie zakończy swą ewolucję na ciągu głównym, spęcznieje i rozpocznie się przepływ materii w przeciwną stronę. Trudno orzec, co będzie dalej. Gwiazda o masie 13 mas Słońca w zasadzie powinna w końcu eksplodować jako supernowa, nie wiadomo jednak, jak na jej wcześniejszą ewolucję wpłynie obecność drugiej gwiazdy niemal zanurzonej w jej atmosferze.

Nie potrafimy jeszcze ze wszystkimi szczegółami przewidywać późnych faz ewolucji gwiazdy, a co dopiero, gdy ma ona towarzysza i wszystko się ogromnie komplikuje. Jak widzimy, komplikacje te są dość zasadnicze: szybciej ewoluować i tracić masę może, wbrew oczekiwaniom, gwiazda mniej masywna, kierunek przepływu materii może się zmieniać, może nastąpić odwrócenie początkowego stosunku mas itd. Mamy przy tym, co prawda, okazję obejrzenia odsłoniętego jądra gwiazdy, każdy może jednak tu stwierdzić, że to przecież nic nadzwyczajnego, bo pozostałości po supernowych lub centralne gwiazdy mgławic planetarnych to też odsłonięte wnętrza dawniej normalnych, masywnych gwiazd. Zgoda, tylko że β *Lyrae* jest chyba najjaśniejszą gwiazdą z tych osobliwych i – co ważniejsze – ukazującą obserwatorom swoje wnętrza nie po zakończeniu życia, lecz jakby na żywo, na bieżąco. Dlatego jej znaczenie dla teorii ewolucji gwiazd jest wyjątkowe.