# Funkcja *pi*

*Jarosław GÓRNICKI*

**W elementarnej geometrii symbolem $\pi$ oznaczamy stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Wielkość ta nie zależy od wyboru okręgu, a jej wartość wynosi 3,1415...**

**Rozważmy teraz pewną funkcję *pi* uogólniającą znaczenie symbolu $\pi$. Niech $\Phi$ będzie dowolną figurą płaską, wypukłą i ograniczoną, o niepustym wnętrzu. Zapowiedzianą funkcję *pi* definiujemy wzorem**

$$pi(\Phi) = \frac{\text{obwód figury } \Phi}{\text{średnica figury } \Phi},$$

**gdzie średnicą figury $\Phi$ nazywamy liczbę $\sup_{x,y\in\Phi} |x-y|$. Z tego określenia wynika, że:**

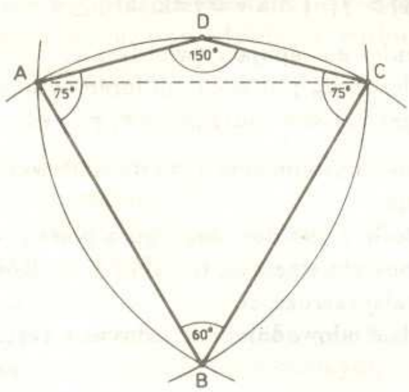
1) $pi(\text{koło}) = \pi$,
2) $pi(\text{trójkąt równoboczny}) = 3$,
3) $pi(\text{trójkąt}) = \dfrac{\text{obwód trójkąta}}{\text{najdłuższy bok}}$ (jeżeli $T$ oznacza dowolny trójkąt, to $2 < pi(T) \le 3$),
4) $pi(\text{kwadrat}) = 2\sqrt{2} \approx 2,82$,
5) $pi(\text{prostokąt o bokach } a, b) = \dfrac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (jeżeli $P$ oznacza dowolny prostokąt, to $2 < pi(P) \le 2\sqrt{2}$).

Wyrażenie

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\cdot\left\{1-\frac{2ab}{(a+b)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

osiąga wartość największą, gdy $\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$ przyjmuje wartość największą, a to ma miejsce, gdy $a=b$.

Skoro ze wszystkich trójkątów *pi*-optymalnym (czyli takim, na którym funkcja $pi(\cdot)$ przyjmuje wartość największą) jest trójkąt równoboczny, to naturalne jest pytanie: czy wśród wszystkich czworokątów *pi*-optymalnym czworokątem jest kwadrat? Niestety, tak nie jest! Przekonamy się o tym wykonując następującą konstrukcję: wykreślmy trójkąt Reuleaux o średnicy 1 i jeden jego łuk podzielmy na pół.




Rys. 1

Trójkąt Reuleaux o średnicy $d$ otrzymujemy jako część wspólną trzech kół o promieniach równych $d$ i środkach będących wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości $d$.

# 350 lat temu urodził się Izaak Newton

*Andrzej K. WRÓBLEWSKI*

Izaak Newton urodził się w dniu Bożego Narodzenia, 25 XII 1642 roku.

Według kalendarza juliańskiego obowiązującego jeszcze wówczas w Anglii; według kalendarza gregoriańskiego, przyjętego już wtedy w wielu krajach Europy, było to 4 I 1643 r. Wszystkie daty w tym artykule odnoszące się do Anglii są podane według kalendarza juliańskiego.

Miejscem narodzin była niewielka farma Woolsthorpe (Lincolnshire), w środkowo-wschodniej Anglii. Ojciec Newtona, noszący także imię Izaak, niepiśmienny rolnik, zmarł 3 miesiące przed narodzeniem syna. Izaak Newton był wcześniakiem i jako noworodek był maleńki (podobno mieścił się w litrowym garnku) i tak słabowity, że nie dawano mu szans na przeżycie. A jednak, mimo tych kłopotów w pierwszych latach, zmarł dopiero w 85 roku życia ciesząc się na ogół dobrym zdrowiem; do końca zachował bujne włosy i stracił tylko jeden ząb.

W 1646 r. jego matka Hannah wyszła powtórnie za mąż za pastora Barnabę Smitha i zamieszkała z nim w pobliskiej wiosce. Trzyletni Izaak pozostał w Woolsthorpe z babką, która go wychowywała przez następne 7 lat. Brak ojca i odejście matki wywarły głęboki wpływ na psychikę chłopca. Nienawidził ojczyma, który mu zabrał matkę, obmyślał zemstę, chcąc ich oboje zniszczyć. Zapewne te przeżycia dzieciństwa ukształtowały w znacznej mierze nieznośny charakter Newtona, który miał się potem dać we znaki tylu ludziom w jego otoczeniu. Reagował z furią, ilekroć wydawało mu się, że ktoś chce mu uszczknąć choć cząstkę osiągnięć.

Czytać, pisać i rachować uczył się mały Izaak w pobliskich szkółkach wiejskich. W 1654 roku został posłany do szkoły w Grantham, noszącej dumną nazwę królewskiej. W dniu 5 VI 1661 r. został przyjęty do Trinity College w Cambridge. Z Grantham wyniósł Newton znajomość łaciny oraz przypuszczalnie elementarnej geometrii. W pierwszych latach pobytu w Cambridge studiował grekę, logikę, etykę i retorykę. Trzeba wiedzieć, że w Cambridge nie było jeszcze wówczas wykładów matematyki na wyższym poziomie. Dopiero w 1663 r. utworzona tam została tzw. katedra Lucasa, a pierwszy profesor na tej katedrze, Izaak Barrow, zainaugurował wykłady 14 III 1664 r.

W 1665 r. wybuchła w Anglii wielka epidemia dżumy. Ofiarą strasznej choroby padali przede wszystkim ludzie żyjący w dużych skupiskach. Władze uniwersytetu w Cambridge postanowiły więc zawiesić zajęcia i rozpuścić studentów do domów. Newton wrócił do Woolsthorpe w sierpniu 1665 r. i w wiejskim ustroniu spędził z małymi przerwami półtora roku do kwietnia 1667 r. Jak twierdził później, w tym właśnie okresie doszedł do swych najważniejszych odkryć.

W 1665 r. uzyskuje niższy stopień uniwersytecki – bakałarza, a 7 VII 1668 r. zostaje magistrem (*master of arts*); pozostaje nadal w Trinity College współpracując z Barrowem. Ten, widząc genialnego następcę, postanawia zrezygnować z katedry Lucasa rekomendując na swe miejsce Newtona. W dniu 29 X 1669 r 26-letni Newton zostaje profesorem i odtąd przez około 20 lat wykłada matematykę, mechanikę i optykę. Zresztą wykłady jego były trudne i nudne, studenci ich nie lubili i czasem w ogóle nie zjawiali się w sali wykładowej.

W 1671 r. buduje swój drugi, bardzo dobry teleskop zwierciadlany (pierwszy w 1668 r.), o którym głośno jest w Cambridge. Wieść o tym dociera do Londynu i członkowie Royal Society (Towarzystwo Królewskie, utworzone w 1662 r.) wyrażają życzenie zobaczenia tego przyrządu. Newton posyła swój teleskop do Londynu i w uznaniu zasług zostaje 11 I 1672 r. wybrany członkiem Royal Society. W odpowiedzi na list zawiadamiający

Łącząc kolejno odcinkami wierzchołki trójkąta i punkt podziału łuku otrzymujemy czworokąt $ABCD$, zwany *deltoidem*, dla którego

$$pi(ABCD) = 2 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3,035\ldots$$

W związku z tym mamy:

**Zadanie.** Dla każdego $n \geq 4$ wyznaczyć $n$-kąty wypukłe, dla których funkcja $pi$ przyjmuje wartość największą.

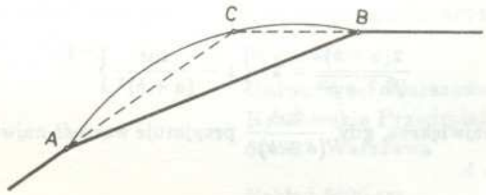
Z pewnych ogólnych twierdzeń wynika, że takie wielokąty istnieją, lecz nie można z nich nic wnioskować o kształcie tych wielokątów. Tego typu dowody, które mówią, że coś istnieje, lecz mimo to nie wiemy, jak to coś wygląda, noszą nazwę dowodów egzystencjalnych. Ponieważ pytamy się o konkretne wyznaczenie tych $n$-kątów, więc takie egzystencjalne podejście nam nie wystarcza.

Zanim przystąpimy do rozwiązania tego problemu, wskażemy oszacowanie wartości, jakie może przyjmować funkcja $pi(\cdot)$.

Oznaczmy przez $f(n)$ największą wartość funkcji $pi$, jaką ona osiąga na wszystkich $n$-kątach wypukłych ($n \geq 3$), np. $f(3) = 3$, $f(4) > 3,035$. Wówczas mamy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** Dla dowolnego $n \geq 3$ istnieje taki $(n+1)$-kąt wypukły $W_{n+1}$, że $pi(W_{n+1}) > f(n)$.

**Dowód.** Wybieramy wielokąt wypukły o $n$ bokach i średnicy 1, na którym funkcja $pi$ przyjmuje wartość największą. Niech jednym z jego boków będzie $AB$. Na tym boku jako na cięciwie wykreślamy łuk o promieniu 1.




Rys. 2

Następnie na łuku $AB$ wybieramy dowolny punkt $C$ i traktując go jako $(n+1)$-szy wierzchołek otrzymujemy $(n+1)$-kąt wypukły $W_{n+1}$ o większym obwodzie i, jak łatwo zauważyć, nie powiększonej średnicy. Zatem $pi(W_{n+1}) > f(n)$. ■

Z twierdzenia tego otrzymujemy natychmiastowy wniosek:

**Wniosek.** $f(n+1) > f(n)$ dla wszystkich $n \geq 3$.

Oczywiste jest również następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.** Jeżeli $R_n$ jest $n$-kątem foremnym, wypukłym ($n \geq 3$), to wtedy $pi(R_n) < \pi$ i $pi(R_n) \to \pi$, gdy $n \to +\infty$.

Będziemy korzystali z następującego przeformułowania znanego twierdzenia Barbiera:

**Twierdzenie 3.** Jeśli $\Phi$ jest dowolną figurą płaską, wypukłą, ograniczoną, o niepustym wnętrzu, to $pi(\Phi) \leq \pi$. Równość zachodzi tylko dla figur o stałej szerokości.

Twierdzenie to będzie udowodnione w jednym z następnych numerów *Delty*.

Szerokością figury w danym kierunku nazywamy kres dolny szerokości pasów prostopadłych do tego kierunku i zawierających tę figurę (pas to obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi, a jego szerokość to odległość tych prostych). Figura o stałej szerokości to taka, dla której szerokość nie zależy od wyboru kierunku.

Ostatecznie: dla dowolnej płaskiej, wypukłej i ograniczonej figury $\Phi$ o niepustym wnętrzu zachodzi

$$2 < pi(\Phi) \leq \pi .$$

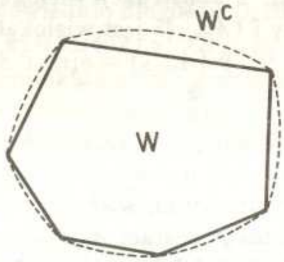
Wracamy teraz do problemu wyznaczenia *pi*-optymalnych $n$-kątów ($n \geq 4$) wypukłych. W tym celu zdefiniujemy klasę wielokątów $A_{m,k}$.

Wypukłe wielokąty o stałej szerokości $d$, złożone z łuków kół o promieniu $d$ nazywamy wielokątami Reuleaux. Jeśli $W$ jest wielokątem foremnym o nieparzystej liczbie boków i średnicy $d$, to zataczając odpowiednie łuki o środkach w wierzchołkach wielokąta otrzymamy foremny wielokąt Reuleaux (tak, jak to było dla trójkąta). Niestety, nie można tak postąpić w przypadku parzystej liczby boków.

O sposobie kreślenia wielokątów Reuleaux można przeczytać w książce H. Rademachera i O. Toeplitza, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956, str. 207–209.

**Definicja.** Jeżeli $n$ ($n \geq 3$) ma nieparzysty dzielnik $m$, czyli $n = mk$, to $A_{m,k}$ jest $n$-kątem wypukłym, równobocznym, mającym $m$ wierzchołków wspólnych z foremnym wielokątem Reuleaux o $m$ łukach i pozostałych $m(k-1)$ wierzchołkach rozmieszczonych równomiernie po $k-1$ na każdym z $m$ łuków.

W dowolnym wypukłym $n$-kącie $W$ ($n \geq 3$) o średnicy 1 zastąpmy każdy bok przez łuk okręgu o promieniu 1, dla którego ten bok jest cięciwą. Figurę ograniczoną tymi łukami oznaczmy $W^c$.




Rys. 3

Łatwo zauważyć, że figura $W^c$ również ma średnicę równą 1, skąd $pi(W)$ oraz $pi(W^c)$ oznaczają odpowiednio obwody figur $W$ i $W^c$. Jeśli $W$ jest wielokątem foremnym o nieparzystej liczbie boków, to $W^c$ jest, jak już powiedzieliśmy, wielokątem Reuleaux. Wprowadźmy również funkcję

$$g(n) = 2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}, \qquad n = 3, 4, 5 \ldots$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie, które daje częściowe rozwiązanie naszego zadania:

**Twierdzenie 4.** Niech $W$ będzie dowolnym wypukłym $n$-kątem ($n \geq 3$) o średnicy 1. Wtedy:

(i) $pi(W) \leq g(n)$;

(ii) $pi(W) = g(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W$ jest wielokątem równobocznym (niekoniecznie foremnym) i $W^c$ jest wielokątem Reuleaux;

(iii) $A_{m,k}$ jest *pi*-optymalnym wielokątem dla $n = mk$, gdy $m$ jest liczbą nieparzystą, oraz

$$f(n) = pi(A_{m,k}) = g(n) .$$

go o wyborze przesyła swą pracę pt. *New Theory about Light and Colors*. Ukazuje się ona 19 II 1672 r. w *Philosophical Transactions*; jest to pierwsza publikowana praca Newtona.

Poglądy na temat natury światła wypowiedziane przez Newtona w tej pracy wywołały krytykę wielu uczonych, m.in. Christiana Huygensa i Roberta Hooke'a. Ten ostatni, wybitny eksperymentator i człowiek obdarzony niezwykłą intuicją fizyczną, starszy od Newtona o 8 lat i już wsławiony swym dziełem *Micrographia* (1665), był wówczas najwybitniejszą postacią w Royal Society. Już to pierwsze starcie Newtona z Hooke'em, prowadzone korespondencyjnie, ale na oczach świata nauki, ustawiło tych dwu wielkich ludzi na pozycjach zaciekłych wrogów, jakimi mieli pozostać przez całe życie.

Powstanie *Zasad* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) związane jest bezpośrednio z pewnym, pozornie błahym, zdarzeniem z początku 1684 r. Pewnego styczniowego dnia trzej wybitni członkowie Royal Society: Edmond Halley, Robert Hooke i Christopher Wren, prowadzili dyskusję, przypuszczalnie w jednej z londyńskich kawiarni, na temat ruchów ciał niebieskich. Halley oznajmił, że udało mu się w poprzednim roku wywnioskować na podstawie III prawa Keplera oraz wzoru Huygensa na siłę odśrodkową (opublikowanego w 1673 r.), iż siła działająca na planety jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości od Słońca. Halley stwierdził dalej, że nie udało mu się dotychczas znaleźć kształtu orbit planet, jakie wynikać winny z takiej postaci siły.

W sierpniu 1684 r. (według innych danych było to w maju) Halley odwiedził Newtona w Cambridge i zadał mu pytanie: Jakiego kształtu będą tory planet, jeżeli siła przyciągania ich przez Słońce jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości? Newton odpowiedział bez namysłu, że będą to elipsy. Zdumiony Halley zapytał Newtona, skąd to wie, na co Newton odparł: Ja już to dawno temu obliczyłem. Przeszukując swe papiery nie mógł jednak znaleźć zapisanego gdzieś dowodu, toteż obiecał go odtworzyć i przesłać Halleyowi do Londynu. Po paru tygodniach Halley otrzymał od Newtona więcej niż oczekiwał, a mianowicie dziesięciostronicową rozprawę *De motu corporum in gyrum* (*O ruchu ciał na orbitach*). Spostrzegłszy szybko, że praca ta zawiera rewolucyjne wyniki, odwiedził ponownie Newtona nalegając, by ten zgodził się swą pracę opublikować. Newton odrzekł, że już pracuje nad nową, rozszerzoną wersją, którą prześle wkrótce do Royal Society. Słowa dotrzymał i 23 II 1685 r. jego praca *Propositiones de motu* została formalnie zapisana w rejestrach Royal Society. Jednocześnie Newton zapowiedział, że pracuje nad dalszym rozszerzeniem swego traktatu.

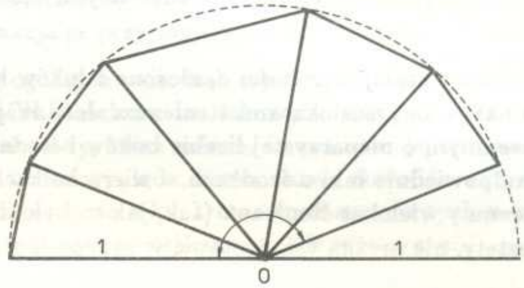
Na wiosnę 1686 r. wielkie dzieło było niemal gotowe. Pierwsza księga *Zasad* została oficjalnie przedstawiona Royal Society na posiedzeniu w dniu 28 IV 1686 r. Podjęto wówczas decyzję, że dzieło zostanie wydrukowane na koszt Towarzystwa. Ówczesny prezes, Samuel Pepys, dał 5 VII 1686 r. swe *Imprimatur*, które widnieje na karcie tytułowej *Zasad*. Miało to jednak tylko znaczenie formalne, gdyż wkrótce okazało się, że Royal Society, borykające się z kłopotami finansowymi, nie jest w stanie pokryć kosztów druku. Halley postanowił wówczas wydrukować „boski traktat" Newtona za własne pieniądze.

W początkach marca 1687 r. Newton przesłał Halleyowi ostateczną wersję księgi drugiej, a w miesiąc później – księgę trzecią. Angażując kilku drukarzy Halley chciał zakończyć druk *Zasad* na koniec trymestru w Trinity College, 21.VI, ale prace opóźniły się o dwa tygodnie. W dniu 5 VII 1687 r. Halley doniósł Newtonowi, że jego dzieło jest wydrukowane.

*Zasady* rozpoczynają się od ośmiu *Definicji*, w których Newton wyjaśnia używane przez siebie pojęcia masy, ilości ruchu (tj. pędu), siły przyłożonej, siły odśrodkowej oraz miar tych sił. Potem następuje *Objaśnienie* (*Scholium*), gdzie znajdujemy słynne stwierdzenia:

**Uwaga.** Twierdzenie to nie wskazuje rozwiązań naszego problemu w przypadku, gdy $n$ jest potęgą liczby 2, np. $n = 4, 8, 16, \ldots$

**Dowód.** Wykreślamy półkole o promieniu 1 i wpisujemy w nie kolejno jako cięciwy boki wielokąta $W$.



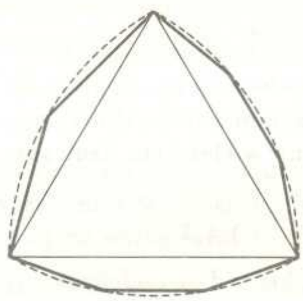

Rys. 4

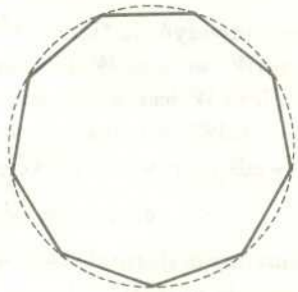
Ponieważ $pi(W^c) \leq \pi$ (twierdzenie 3), więc rzeczywiście wszystkie cięciwy dadzą się wpisać w to półkole. Ustalając końce wpisanej w półkole łamanej stwierdzamy, że długość tej łamanej jest największa, gdy jej boki są równe (dlaczego?). Długość każdej takiej „równej" cięciwy jest nie większa niż $2\sin\frac{\pi}{2n}$, więc $pi(W) \leq g(n)$. Dowodzi to warunku (i).

Udowodnimy teraz (ii). Z powyższej konstrukcji wynika, że $pi(W) = g(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy łamana wpisana w półkole jest równoboczna i wypełnia je w całości. To zaś równoważne jest temu, że $W$ jest równoboczny i $pi(W^c) = \pi$. Drugi z tych warunków jest równoważny wobec twierdzenia 3 temu, że $W^c$ jest wielokątem Reuleaux. To dowodzi (ii).

Udowodnimy teraz (iii). Z konstrukcji wielokąta $A_{m,k}$ wynika, że jest on równoboczny i $(A_{m,k})^c$ jest wielokątem Reuleaux. Zatem na podstawie (ii) oraz (i), $pi(A_{m,k}) = g(n)$ i $A_{m,k}$ jest $pi$-optymalny, co dowodzi warunku (iii). ■

Przypatrzmy się teraz klasie $pi$-optymalnych wielokątów postaci $A_{m,k}$. Jeżeli $n = mk$ ma więcej niż jedno takie przedstawienie z $m$ nieparzystym, większym od jedności, to dla ustalonego $n$ każdy wielokąt postaci $A_{m,k}$ jest $pi$-optymalny. Na przykład dla $n = 9$ oba wielokąty $A_{3,3}$, $A_{9,1}$ są $pi$-optymalne.





Rys. 5. $pi$-optymalny wielokąt $A_{3,3}$. Rys. 6. $pi$-optymalny wielokąt $A_{9,1}$.

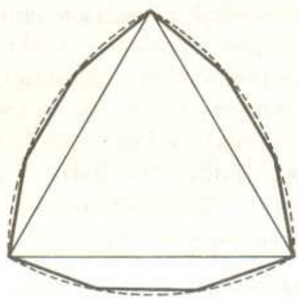
Gdy $n \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, to wielokąt foremny $R_n$ jest $pi$-optymalny i $pi(R_n) = g(n)$. Gdy zaś $n > 3$ jest liczbą parzystą, to $pi(R_n) = n\sin\frac{\pi}{n} < g(n)$.

Do rozważenia pozostają jeszcze dwie sprawy:

1) Czy oprócz wielokątów typu $A_{m,k}$ istnieją dla $n = mk$ jakieś nierównoboczne wielokąty $W$, dla których $W^c$ jest wielokątem Reuleaux?
2) Jak wygląda sytuacja, gdy $n > 3$ jest potęgą liczby 2?

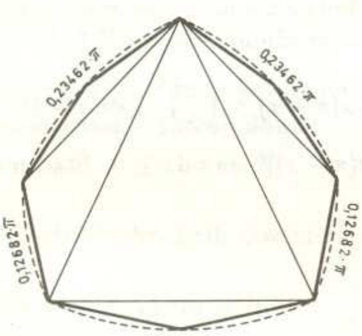
Systematyczne badania tych kwestii dla małych wartości $n \geq 3$ wykazały, co następuje:

- $A_{3,1}$ jest jedynym *pi*-optymalnym trójkątem;
- dla $n = 4 = 2^2$ deltoid (rys. 1) jest jedynym *pi*-optymalnym czworokątem wpisanym w regularny wielokąt Reuleaux i $f(4) < g(4) \approx 3,061$;
- dla $n = 5, 6, 7, 8, 9$ nie ma nieforemnych wielokątów Reuleaux, w które można by wpisać równoboczny $n$-kąt. Zatem wszystkie *pi*-optymalne wielokąty o $n = 5, 6, 7, 9$ bokach są typu $A_{m,k}$;
- dla $n = 8 = 2^3$ najlepszym wielokątem wpisanym w foremny wielokąt Reuleaux o 3, 5 lub 7 łukach jest ośmiokąt wpisany w trójkąt Reuleaux.



Rys. 7

Dla tego ośmiokąta *pi* ma wartość około 3,119, lecz nie jest to wartość *pi*-optymalna. Analiza numeryczna pokazuje, że lepszy ośmiokąt można wpisać w nieforemny pięciokąt Reuleaux (rys. 8), którego łuki mają odpowiednio długości: $0,23462 \cdot \pi$; $0,12682 \cdot \pi$; $0,27712 \cdot \pi$; $0,12682 \cdot \pi$; $0,23462 \cdot \pi$. Czy jest to już *pi*-optymalny ośmiokąt? Dla tego ośmiokąta *pi* ma wartość około 3,1211 i jest ona bliska wartości $g(8) = 16 \sin \frac{\pi}{16} \approx 3,1214$.




Rys. 8

Dla wielokątów o większej liczbie boków ($n \geq 10$) ogólne i wyczerpujące odpowiedzi również nie są znane.

Na zakończenie zwróćmy uwagę, że funkcja *pi* nie jest jedynym możliwym uogólnieniem symbolu $\pi$. Można na przykład wprowadzić funkcję $\widehat{pi}$ określoną też na zbiorze wszystkich figur płaskich, wypukłych, ograniczonych, o niepustym wnętrzu, następująco

$$\widehat{pi}(\Phi) = \frac{4 \cdot |\Phi|}{(\text{średnica figury } \Phi)^2},$$

gdzie $|\Phi|$ oznacza pole figury $\Phi$. Dla tej funkcji można rozważać analogiczne problemy.

„I. Czas absolutny, prawdziwy i matematyczny, sam z siebie i przez swą naturę, upływa równomiernie bez związku z czymkolwiek zewnętrznym i inaczej nazywa się trwaniem...
II. Przestrzeń absolutna, przez swą naturę, bez związku z czymkolwiek zewnętrznym, pozostaje zawsze taka sama i niezmieniona..."

W dalszej części *Objaśnienia* Newton definiuje pojęcia miejsca oraz ruchu absolutnego i względnego. W ostatniej części wstępu podaje natomiast *Aksjomaty, czyli prawa ruchu*.
„I Prawo: Każde ciało pozostaje w swym stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej, dopóki siły przyłożone nie zmuszą go do zmiany tego stanu.
II Prawo: Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i następuje wzdłuż prostej, wzdłuż której siła ta jest przyłożona.
III Prawo: Każdemu działaniu towarzyszy zawsze przeciwne i równe przeciwdziałanie, to jest wzajemne działania dwóch ciał na siebie są zawsze równe i skierowane przeciwnie."

Na początku trzeciej księgi znajdujemy słynne *Prawidła badania natury*, będące wykładem zasad metodologicznych przyrodoznawstwa.

„Prawidło 1. Nie należy dla zjawisk natury przypuszczać więcej przyczyn, niż te, które są prawdziwe i wystarczają do ich objaśnienia.

Prawidło 2. Trzeba zatem, jak tylko to jest możliwe, przypisywać zjawiskom tego samego rodzaju te same przyczyny...

Prawidło 3. Te właściwości ciał, które nie mogą być ani wzmocnione, ani osłabione i przypadają w udziale wszystkim ciałom dostępnym naszym doświadczeniom, należy uznać za powszechne właściwości wszystkich ciał w ogóle...

Prawidło 4. W filozofii doświadczalnej twierdzenia wyprowadzone ze zjawisk metodą indukcji należy uważać za ścisłe, lub w przybliżeniu prawdziwe, dopóki nie zajdą zjawiska inne, przez które twierdzenia te zostaną bardziej uściślone, lub okażą się podległe wyjątkom..."