Funkcja *pi*

Jarosław GÓRNICKI

W elementarnej geometrii symbolem π oznaczamy stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Wielkość ta nie zależy od wyboru okręgu, a jej wartość wynosi 3,1415...

Rozważmy teraz pewną funkcję *pi* uogólniającą znaczenie symbolu π. Niech Φ będzie dowolną figurą płaską, wypukłą i ograniczoną, o niepustym wnętrzu. Zapowiedzianą funkcję *pi* definiujemy wzorem

$$pi(\Phi) = \frac{\text{obwód figury } \Phi}{\text{średnica figury } \Phi},$$

gdzie średnicą figury Φ nazywamy liczbę $\sup_{x,y\in\Phi} |x-y|$. Z tego określenia wynika, że:

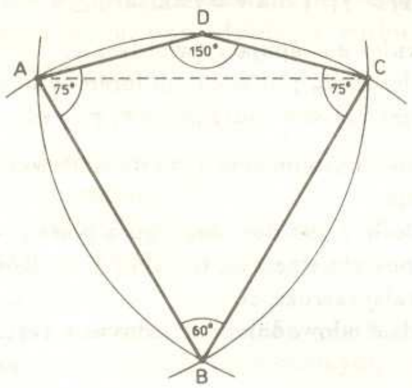
1) $pi(\text{koło}) = \pi$,
2) $pi(\text{trójkąt równoboczny}) = 3$,
3) $pi(\text{trójkąt}) = \dfrac{\text{obwód trójkąta}}{\text{najdłuższy bok}}$ (jeżeli T oznacza dowolny trójkąt, to $2 < pi(T) \le 3$),
4) $pi(\text{kwadrat}) = 2\sqrt{2} \approx 2,82$,
5) $pi(\text{prostokąt o bokach } a, b) = \dfrac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (jeżeli P oznacza dowolny prostokąt, to $2 < pi(P) \le 2\sqrt{2}$).

Wyrażenie

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\cdot\left\{1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

osiąga wartość największą, gdy $\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$ przyjmuje wartość największą, a to ma miejsce, gdy $a = b$.

Skoro ze wszystkich trójkątów *pi*-optymalnym (czyli takim, na którym funkcja $pi(\cdot)$ przyjmuje wartość największą) jest trójkąt równoboczny, to naturalne jest pytanie: czy wśród wszystkich czworokątów *pi*-optymalnym czworokątem jest kwadrat? Niestety, tak nie jest! Przekonamy się o tym wykonując następującą konstrukcję: wykreślmy trójkąt Reuleaux o średnicy 1 i jeden jego łuk podzielmy na pół.



Rys. 1

Trójkąt Reuleaux o średnicy d otrzymujemy jako część wspólną trzech kół o promieniach równych d i środkach będących wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości d.

350 lat temu urodził się Izaak Newton

Andrzej K. WRÓBLEWSKI

Izaak Newton urodził się w dniu Bożego Narodzenia, 25 XII 1642 roku.

Według kalendarza juliańskiego obowiązującego jeszcze wówczas w Anglii; według kalendarza gregoriańskiego, przyjętego już wtedy w wielu krajach Europy, było to 4 I 1643 r. Wszystkie daty w tym artykule odnoszące się do Anglii są podane według kalendarza juliańskiego.

Miejscem narodzin była niewielka farma Woolsthorpe (Lincolnshire), w środkowo-wschodniej Anglii. Ojciec Newtona, noszący także imię Izaak, niepiśmienny rolnik, zmarł 3 miesiące przed narodzeniem syna. Izaak Newton był wcześniakiem i jako noworodek był maleńki (podobno mieścił się w litrowym garnku) i tak słabowity, że nie dawano mu szans na przeżycie. A jednak, mimo tych kłopotów w pierwszych latach, zmarł dopiero w 85 roku życia ciesząc się na ogół dobrym zdrowiem; do końca zachował bujne włosy i stracił tylko jeden ząb.

W 1646 r. jego matka Hannah wyszła powtórnie za mąż za pastora Barnabę Smitha i zamieszkała z nim w pobliskiej wiosce. Trzyletni Izaak pozostał w Woolsthorpe z babką, która go wychowywała przez następne 7 lat. Brak ojca i odejście matki wywarły głęboki wpływ na psychikę chłopca. Nienawidził ojczyma, który mu zabrał matkę, obmyślał zemstę, chcąc ich oboje zniszczyć. Zapewne te przeżycia dzieciństwa ukształtowały w znacznej mierze nieznośny charakter Newtona, który miał się potem dać we znaki tylu ludziom w jego otoczeniu. Reagował z furią, ilekroć wydawało mu się, że ktoś chce mu uszczknąć choć cząstkę osiągnięć.

Czytać, pisać i rachować uczył się mały Izaak w pobliskich szkółkach wiejskich. W 1654 roku został posłany do szkoły w Grantham, noszącej dumną nazwę królewskiej. W dniu 5 VI 1661 r. został przyjęty do Trinity College w Cambridge. Z Grantham wyniósł Newton znajomość łaciny oraz przypuszczalnie elementarnej geometrii. W pierwszych latach pobytu w Cambridge studiował grekę, logikę, etykę i retorykę. Trzeba wiedzieć, że w Cambridge nie było jeszcze wówczas wykładów matematyki na wyższym poziomie. Dopiero w 1663 r. utworzona tam została tzw. katedra Lucasa, a pierwszy profesor na tej katedrze, Izaak Barrow, zainaugurował wykłady 14 III 1664 r.

W 1665 r. wybuchła w Anglii wielka epidemia dżumy. Ofiarą strasznej choroby padali przede wszystkim ludzie żyjący w dużych skupiskach. Władze uniwersytetu w Cambridge postanowiły więc zawiesić zajęcia i rozpuścić studentów do domów. Newton wrócił do Woolsthorpe w sierpniu 1665 r. i w wiejskim ustroniu spędził z małymi przerwami półtora roku do kwietnia 1667 r. Jak twierdził później, w tym właśnie okresie doszedł do swych najważniejszych odkryć.

W 1665 r. uzyskuje niższy stopień uniwersytecki – bakałarza, a 7 VII 1668 r. zostaje magistrem (*master of arts*); pozostaje nadal w Trinity College współpracując z Barrowem. Ten, widząc genialnego następcę, postanawia zrezygnować z katedry Lucasa rekomendując na swe miejsce Newtona. W dniu 29 X 1669 r 26-letni Newton zostaje profesorem i odtąd przez około 20 lat wykłada matematykę, mechanikę i optykę. Zresztą wykłady jego były trudne i nudne, studenci ich nie lubili i czasem w ogóle nie zjawiali się w sali wykładowej.

W 1671 r. buduje swój drugi, bardzo dobry teleskop zwierciadlany (pierwszy w 1668 r.), o którym głośno jest w Cambridge. Wieść o tym dociera do Londynu i członkowie Royal Society (Towarzystwo Królewskie, utworzone w 1662 r.) wyrażają życzenie zobaczenia tego przyrządu. Newton posyła swój teleskop do Londynu i w uznaniu zasług zostaje 11 I 1672 r. wybrany członkiem Royal Society. W odpowiedzi na list zawiadamiający

Łącząc kolejno odcinkami wierzchołki trójkąta i punkt podziału łuku otrzymujemy czworokąt $ABCD$, zwany *deltoidem*, dla którego

$$pi(ABCD) = 2 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3,035\ldots$$

W związku z tym mamy:

Zadanie. Dla każdego $n \geq 4$ wyznaczyć n-kąty wypukłe, dla których funkcja pi przyjmuje wartość największą.

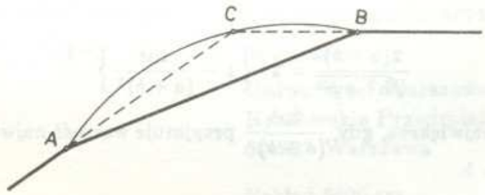
Z pewnych ogólnych twierdzeń wynika, że takie wielokąty istnieją, lecz nie można z nich nic wnioskować o kształcie tych wielokątów. Tego typu dowody, które mówią, że coś istnieje, lecz mimo to nie wiemy, jak to coś wygląda, noszą nazwę dowodów egzystencjalnych. Ponieważ pytamy się o konkretne wyznaczenie tych n-kątów, więc takie egzystencjalne podejście nam nie wystarcza.

Zanim przystąpimy do rozwiązania tego problemu, wskażemy oszacowanie wartości, jakie może przyjmować funkcja $pi(\cdot)$.

Oznaczmy przez $f(n)$ największą wartość funkcji pi, jaką ona osiąga na wszystkich n-kątach wypukłych ($n \geq 3$), np. $f(3) = 3$, $f(4) > 3,035$. Wówczas mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Dla dowolnego $n \geq 3$ istnieje taki $(n+1)$-kąt wypukły W_{n+1}, że $pi(W_{n+1}) > f(n)$.

Dowód. Wybieramy wielokąt wypukły o n bokach i średnicy 1, na którym funkcja pi przyjmuje wartość największą. Niech jednym z jego boków będzie AB. Na tym boku jako na cięciwie wykreślamy łuk o promieniu 1.



Rys. 2

Następnie na łuku AB wybieramy dowolny punkt C i traktując go jako $(n+1)$-szy wierzchołek otrzymujemy $(n+1)$-kąt wypukły W_{n+1} o większym obwodzie i, jak łatwo zauważyć, nie powiększonej średnicy. Zatem $pi(W_{n+1}) > f(n)$. ■

Z twierdzenia tego otrzymujemy natychmiastowy wniosek:

Wniosek. $f(n+1) > f(n)$ dla wszystkich $n \geq 3$.

Oczywiste jest również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Jeżeli R_n jest n-kątem foremnym, wypukłym ($n \geq 3$), to wtedy $pi(R_n) < \pi$ i $pi(R_n) \to \pi$, gdy $n \to +\infty$.

Będziemy korzystali z następującego przeformułowania znanego twierdzenia Barbiera:

Twierdzenie 3. Jeśli Φ jest dowolną figurą płaską, wypukłą, ograniczoną, o niepustym wnętrzu, to $pi(\Phi) \leq \pi$. Równość zachodzi tylko dla figur o stałej szerokości.

Twierdzenie to będzie udowodnione w jednym z następnych numerów *Delty*.

Szerokością figury w danym kierunku nazywamy kres dolny szerokości pasów prostopadłych do tego kierunku i zawierających tę figurę (pas to obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi, a jego szerokość to odległość tych prostych). Figura o stałej szerokości to taka, dla której szerokość nie zależy od wyboru kierunku.

Ostatecznie: dla dowolnej płaskiej, wypukłej i ograniczonej figury Φ o niepustym wnętrzu zachodzi

$$2 < pi(\Phi) \leq \pi .$$

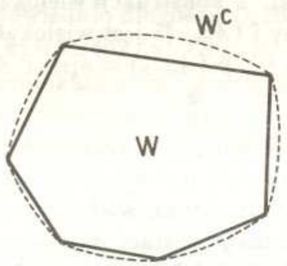
Wracamy teraz do problemu wyznaczenia pi-optymalnych n-kątów ($n \geq 4$) wypukłych. W tym celu zdefiniujemy klasę wielokątów $A_{m,k}$.

Wypukłe wielokąty o stałej szerokości d, złożone z łuków kół o promieniu d nazywamy wielokątami Reuleaux. Jeśli W jest wielokątem foremnym o nieparzystej liczbie boków i średnicy d, to zataczając odpowiednie łuki o środkach w wierzchołkach wielokąta otrzymamy foremny wielokąt Reuleaux (tak, jak to było dla trójkąta). Niestety, nie można tak postąpić w przypadku parzystej liczby boków.

O sposobie kreślenia wielokątów Reuleaux można przeczytać w książce H. Rademachera i O. Toeplitza, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956, str. 207–209.

Definicja. Jeżeli n ($n \geq 3$) ma nieparzysty dzielnik m, czyli $n = mk$, to $A_{m,k}$ jest n-kątem wypukłym, równobocznym, mającym m wierzchołków wspólnych z foremnym wielokątem Reuleaux o m łukach i pozostałych $m(k-1)$ wierzchołkach rozmieszczonych równomiernie po $k-1$ na każdym z m łuków.

W dowolnym wypukłym n-kącie W ($n \geq 3$) o średnicy 1 zastąpmy każdy bok przez łuk okręgu o promieniu 1, dla którego ten bok jest cięciwą. Figurę ograniczoną tymi łukami oznaczmy W^c.



Rys. 3

Łatwo zauważyć, że figura W^c również ma średnicę równą 1, skąd $pi(W)$ oraz $pi(W^c)$ oznaczają odpowiednio obwody figur W i W^c. Jeśli W jest wielokątem foremnym o nieparzystej liczbie boków, to W^c jest, jak już powiedzieliśmy, wielokątem Reuleaux. Wprowadźmy również funkcję

$$g(n) = 2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}, \qquad n = 3, 4, 5 \ldots$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie, które daje częściowe rozwiązanie naszego zadania:

Twierdzenie 4. Niech W będzie dowolnym wypukłym n-kątem ($n \geq 3$) o średnicy 1. Wtedy:

(i) $pi(W) \leq g(n)$;

(ii) $pi(W) = g(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy W jest wielokątem równobocznym (niekoniecznie foremnym) i W^c jest wielokątem Reuleaux;

(iii) $A_{m,k}$ jest pi-optymalnym wielokątem dla $n = mk$, gdy m jest liczbą nieparzystą, oraz

$$f(n) = pi(A_{m,k}) = g(n) .$$

go o wyborze przesyła swą pracę pt. *New Theory about Light and Colors.* Ukazuje się ona 19 II 1672 r. w *Philosophical Transactions*; jest to pierwsza publikowana praca Newtona.

Poglądy na temat natury światła wypowiedziane przez Newtona w tej pracy wywołały krytykę wielu uczonych, m.in. Christiana Huygensa i Roberta Hooke'a. Ten ostatni, wybitny eksperymentator i człowiek obdarzony niezwykłą intuicją fizyczną, starszy od Newtona o 8 lat i już wsławiony swym dziełem *Micrographia* (1665), był wówczas najwybitniejszą postacią w Royal Society. Już to pierwsze starcie Newtona z Hooke'em, prowadzone korespondencyjnie, ale na oczach świata nauki, ustawiło tych dwu wielkich ludzi na pozycjach zaciekłych wrogów, jakimi mieli pozostać przez całe życie.

Powstanie *Zasad* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) związane jest bezpośrednio z pewnym, pozornie błahym, zdarzeniem z początku 1684 r. Pewnego styczniowego dnia trzej wybitni członkowie Royal Society: Edmond Halley, Robert Hooke i Christopher Wren, prowadzili dyskusję, przypuszczalnie w jednej z londyńskich kawiarni, na temat ruchów ciał niebieskich. Halley oznajmił, że udało mu się w poprzednim roku wywnioskować na podstawie III prawa Keplera oraz wzoru Huygensa na siłę odśrodkową (opublikowanego w 1673 r.), iż siła działająca na planety jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości od Słońca. Halley stwierdził dalej, że nie udało mu się dotychczas znaleźć kształtu orbit planet, jakie wynikać winny z takiej postaci siły.

W sierpniu 1684 r. (według innych danych było to w maju) Halley odwiedził Newtona w Cambridge i zadał mu pytanie: Jakiego kształtu będą tory planet, jeżeli siła przyciągania ich przez Słońce jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości? Newton odpowiedział bez namysłu, że będą to elipsy. Zdumiony Halley zapytał Newtona, skąd to wie, na co Newton odparł: Ja już to dawno temu obliczyłem. Przeszukując swe papiery nie mógł jednak znaleźć zapisanego gdzieś dowodu, toteż obiecał go odtworzyć i przesłać Halleyowi do Londynu. Po paru tygodniach Halley otrzymał od Newtona więcej niż oczekiwał, a mianowicie dziesięciostronicową rozprawę *De motu corporum in gyrum* (*O ruchu ciał na orbitach*). Spostrzegłszy szybko, że praca ta zawiera rewolucyjne wyniki, odwiedził ponownie Newtona nalegając, by ten zgodził się swą pracę opublikować. Newton odrzekł, że już pracuje nad nową, rozszerzoną wersją, którą prześle wkrótce do Royal Society. Słowa dotrzymał i 23 II 1685 r. jego praca *Propositiones de motu* została formalnie zapisana w rejestrach Royal Society. Jednocześnie Newton zapowiedział, że pracuje nad dalszym rozszerzeniem swego traktatu.

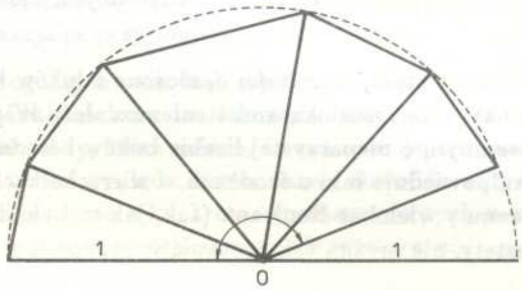
Na wiosnę 1686 r. wielkie dzieło było niemal gotowe. Pierwsza księga *Zasad* została oficjalnie przedstawiona Royal Society na posiedzeniu w dniu 28 IV 1686 r. Podjęto wówczas decyzję, że dzieło zostanie wydrukowane na koszt Towarzystwa. Ówczesny prezes, Samuel Pepys, dał 5 VII 1686 r. swe *Imprimatur*, które widnieje na karcie tytułowej *Zasad*. Miało to jednak tylko znaczenie formalne, gdyż wkrótce okazało się, że Royal Society, borykające się z kłopotami finansowymi, nie jest w stanie pokryć kosztów druku. Halley postanowił wówczas wydrukować „boski traktat" Newtona za własne pieniądze.

W początkach marca 1687 r. Newton przesłał Halleyowi ostateczną wersję księgi drugiej, a w miesiąc później – księgę trzecią. Angażując kilku drukarzy Halley chciał zakończyć druk *Zasad* na koniec trymestru w Trinity College, 21.VI, ale prace opóźniły się o dwa tygodnie. W dniu 5 VII 1687 r. Halley doniósł Newtonowi, że jego dzieło jest wydrukowane.

Zasady rozpoczynają się od ośmiu *Definicji*, w których Newton wyjaśnia używane przez siebie pojęcia masy, ilości ruchu (tj. pędu), siły przyłożonej, siły odśrodkowej oraz miar tych sił. Potem następuje *Objaśnienie* (*Scholium*), gdzie znajdujemy słynne stwierdzenia:

Uwaga. Twierdzenie to nie wskazuje rozwiązań naszego problemu w przypadku, gdy n jest potęgą liczby 2, np. $n = 4, 8, 16, \ldots$

Dowód. Wykreślamy półkole o promieniu 1 i wpisujemy w nie kolejno jako cięciwy boki wielokąta W.



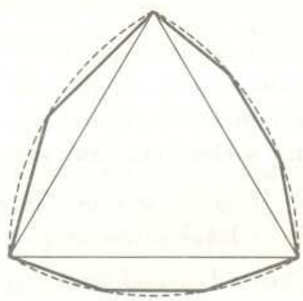
Rys. 4

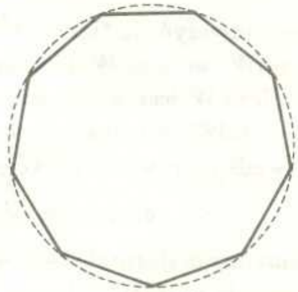
Ponieważ $pi(W^c) \leq \pi$ (twierdzenie 3), więc rzeczywiście wszystkie cięciwy dadzą się wpisać w to półkole. Ustalając końce wpisanej w półkole łamanej stwierdzamy, że długość tej łamanej jest największa, gdy jej boki są równe (dlaczego?). Długość każdej takiej „równej" cięciwy jest nie większa niż $2\sin\frac{\pi}{2n}$, więc $pi(W) \leq g(n)$. Dowodzi to warunku (i).

Udowodnimy teraz (ii). Z powyższej konstrukcji wynika, że $pi(W) = g(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy łamana wpisana w półkole jest równoboczna i wypełnia je w całości. To zaś równoważne jest temu, że W jest równoboczny i $pi(W^c) = \pi$. Drugi z tych warunków jest równoważny wobec twierdzenia 3 temu, że W^c jest wielokątem Reuleaux. To dowodzi (ii).

Udowodnimy teraz (iii). Z konstrukcji wielokąta $A_{m,k}$ wynika, że jest on równoboczny i $(A_{m,k})^c$ jest wielokątem Reuleaux. Zatem na podstawie (ii) oraz (i), $pi(A_{m,k}) = g(n)$ i $A_{m,k}$ jest pi-optymalny, co dowodzi warunku (iii). ■

Przypatrzmy się teraz klasie pi-optymalnych wielokątów postaci $A_{m,k}$. Jeżeli $n = mk$ ma więcej niż jedno takie przedstawienie z m nieparzystym, większym od jedności, to dla ustalonego n każdy wielokąt postaci $A_{m,k}$ jest pi-optymalny. Na przykład dla $n = 9$ oba wielokąty $A_{3,3}$, $A_{9,1}$ są pi-optymalne.





Rys. 5. pi-optymalny wielokąt $A_{3,3}$. Rys. 6. pi-optymalny wielokąt $A_{9,1}$.

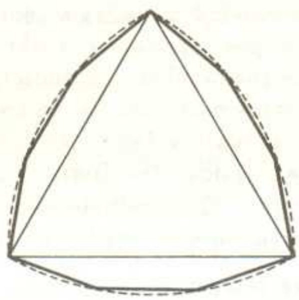
Gdy $n \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, to wielokąt foremny R_n jest pi-optymalny i $pi(R_n) = g(n)$. Gdy zaś $n > 3$ jest liczbą parzystą, to $pi(R_n) = n\sin\frac{\pi}{n} < g(n)$.

Do rozważenia pozostają jeszcze dwie sprawy:

1) Czy oprócz wielokątów typu $A_{m,k}$ istnieją dla $n = mk$ jakieś nierównoboczne wielokąty W, dla których W^c jest wielokątem Reuleaux?
2) Jak wygląda sytuacja, gdy $n > 3$ jest potęgą liczby 2?

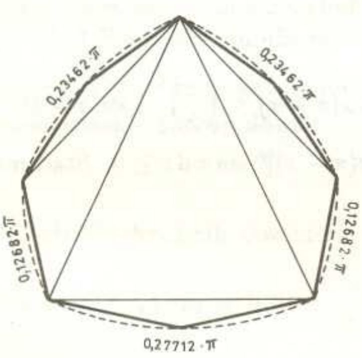
Systematyczne badania tych kwestii dla małych wartości $n \geq 3$ wykazały, co następuje:

- $A_{3,1}$ jest jedynym *pi*-optymalnym trójkątem;
- dla $n = 4 = 2^2$ deltoid (rys. 1) jest jedynym *pi*-optymalnym czworokątem wpisanym w regularny wielokąt Reuleaux i $f(4) < g(4) \approx 3,061$;
- dla $n = 5, 6, 7, 8, 9$ nie ma nieforemnych wielokątów Reuleaux, w które można by wpisać równoboczny n-kąt. Zatem wszystkie *pi*-optymalne wielokąty o $n = 5, 6, 7, 9$ bokach są typu $A_{m,k}$;
- dla $n = 8 = 2^3$ najlepszym wielokątem wpisanym w foremny wielokąt Reuleaux o 3, 5 lub 7 łukach jest ośmiokąt wpisany w trójkąt Reuleaux.



Rys. 7

Dla tego ośmiokąta *pi* ma wartość około 3,119, lecz nie jest to wartość *pi*-optymalna. Analiza numeryczna pokazuje, że lepszy ośmiokąt można wpisać w nieforemny pięciokąt Reuleaux (rys. 8), którego łuki mają odpowiednio długości: $0,23462 \cdot \pi$; $0,12682 \cdot \pi$; $0,27712 \cdot \pi$; $0,12682 \cdot \pi$; $0,23462 \cdot \pi$. Czy jest to już *pi*-optymalny ośmiokąt? Dla tego ośmiokąta *pi* ma wartość około 3,1211 i jest ona bliska wartości $g(8) = 16 \sin \frac{\pi}{16} \approx 3,1214$.



Rys. 8

Dla wielokątów o większej liczbie boków ($n \geq 10$) ogólne i wyczerpujące odpowiedzi również nie są znane.

Na zakończenie zwróćmy uwagę, że funkcja *pi* nie jest jedynym możliwym uogólnieniem symbolu π. Można na przykład wprowadzić funkcję $\widehat{pi}$ określoną też na zbiorze wszystkich figur płaskich, wypukłych, ograniczonych, o niepustym wnętrzu, następująco

$$\widehat{pi}(\Phi) = \frac{4 \cdot |\Phi|}{(\text{średnica figury } \Phi)^2},$$

gdzie $|\Phi|$ oznacza pole figury Φ. Dla tej funkcji można rozważać analogiczne problemy.

„I. Czas absolutny, prawdziwy i matematyczny, sam z siebie i przez swą naturę, upływa równomiernie bez związku z czymkolwiek zewnętrznym i inaczej nazywa się trwaniem...
II. Przestrzeń absolutna, przez swą naturę, bez związku z czymkolwiek zewnętrznym, pozostaje zawsze taka sama i niezmieniona..."

W dalszej części *Objaśnienia* Newton definiuje pojęcia miejsca oraz ruchu absolutnego i względnego. W ostatniej części wstępu podaje natomiast *Aksjomaty, czyli prawa ruchu.*
„I Prawo: Każde ciało pozostaje w swym stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej, dopóki siły przyłożone nie zmuszą go do zmiany tego stanu.
II Prawo: Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i następuje wzdłuż prostej, wzdłuż której siła ta jest przyłożona.
III Prawo: Każdemu działaniu towarzyszy zawsze przeciwne i równe przeciwdziałanie, to jest wzajemne działania dwóch ciał na siebie są zawsze równe i skierowane przeciwnie."

Na początku trzeciej księgi znajdujemy słynne *Prawidła badania natury*, będące wykładem zasad metodologicznych przyrodoznawstwa.

„Prawidło 1. Nie należy dla zjawisk natury przypuszczać więcej przyczyn, niż te, które są prawdziwe i wystarczają do ich objaśnienia.

Prawidło 2. Trzeba zatem, jak tylko to jest możliwe, przypisywać zjawiskom tego samego rodzaju te same przyczyny...

Prawidło 3. Te właściwości ciał, które nie mogą być ani wzmocnione, ani osłabione i przypadają w udziale wszystkim ciałom dostępnym naszym doświadczeniom, należy uznać za powszechne właściwości wszystkich ciał w ogóle...

Prawidło 4. W filozofii doświadczalnej twierdzenia wyprowadzone ze zjawisk metodą indukcji należy uważać za ścisłe, lub w przybliżeniu prawdziwe, dopóki nie zajdą zjawiska inne, przez które twierdzenia te zostaną bardziej uściślone, lub okażą się podległe wyjątkom..."

Nie można zrozumieć znaczenia *Zasad* Newtona oraz reakcji, jaką to dzieło wywołało wśród ówczesnych uczonych, jeśli się nie prześledzi historii poglądów na temat ruchu, ciążenia i struktury świata.

System Arystotelesa, który utrzymywał się w przyrodoznawstwie przez niemal dwa tysiące lat, miał u swych podstaw dychotomiczny podział świata na dwie części, rządzone odmiennymi prawami. Oto streszczenie tego systemu.

Wszystkie substancje na Ziemi i w jej najbliższym otoczeniu, w tzw. *świecie podksiężycowym*, składają się z czterech elementów: ognia, powietrza, wody i ziemi, połączonych z sobą w różnych proporcjach. Ruchy ciał ziemskich dzielą się na *naturalne*, wynikające z samej natury substancji tych ciał, oraz *wymuszone* przez działanie zewnętrzne jakiegoś czynnika poruszającego. Pewne ciała przez swą naturę spadają w dół, dążąc do środka świata i te nazywają się ciałami *ciężkimi*. Inne ciała, nazywane *lekkimi*, przez swą naturę unoszą się do góry.

W przeciwieństwie do naturalnych ruchów spadania w dół i unoszenia się w górę ciał ziemskich, wśród ciał niebieskich występuje wieczny *ruch kołowy*. Wobec tego ciała te nie mogą składać się z czterech elementów ziemskich, lecz z czegoś innego; ten piąty element, eter (łac. *quinta essentia*) jest niezmienny, a wieczny ruch kołowy wynika też z jego natury.

Świat ma zatem strukturę geocentryczną, gdyż ciężka Ziemia, przez swą naturę znajduje się w jego środku (nawet, gdyby kiedyś tam nie była, to znalazłaby się tam już dawno dzięki swemu ruchowi naturalnemu). Wokół Ziemi mamy koncentryczne sfery trzech pozostałych elementów w porządku ich lekkości: najpierw woda, potem powietrze, wreszcie najwyżej – sfera ognia. Wyżej rozciąga się świat ciał niebieskich, obracające się wokół nieruchomej Ziemi koncentryczne sfery unoszące kolejno Księżyc, Merkurego, Wenus, Słońce, Marsa, Jowisza, Saturna; ostatnią jest sfera gwiazd stałych (*firmamentum*) będąca granicą kosmosu.

Prosty dowód niewymierności liczby π

Michał KRYCH

W 1761 roku niemiecki matematyk, Johann H. Lambert podał błędny dowód niewymierności π, natomiast poprawny podał w roku 1766. Jego dowód wykorzystywał tzw. ułamki łańcuchowe. Podobny dowód znalazł nieco później Francuz Andrien M. Legendre. Około stu lat potem Joseph Liouville sformułował i udowodnił twierdzenie, które pozwoliło wskazać konkretne liczby przestępne, tj. takie, które nie są pierwiastkami żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Po upływie niewielu lat Charles Hermite udowodnił, że jedna z „najważniejszych" liczb w matematyce, liczba e, jest przestępna, a wkrótce Ferdinand Lindemann wykazał, że znana od starożytności liczba π również jest przestępna. Tym samym okazało się, że kwadratura koła nie jest wykonalna. Natomiast w 1947 roku I. Niven, wzorując się na wspomnianym wyżej dowodzie Hermite'a, podał dowód niewymierności π wykorzystujący jedynie najprostsze własności całek, znane obecnie uczniom szkół średnich. Jego rozumowanie przytoczymy poniżej.

Załóżmy, że $\pi = \frac{p}{q}$, gdzie p oraz q oznaczają liczby naturalne. Niech

$$c_n = \frac{q^n}{n!}\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \, dx .$$

Wykażemy, że
1. $\lim c_n = 0$,
2. $c_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej n,
3. c_n jest liczbą całkowitą dla każdej liczby naturalnej n.

Oznaczać to będzie, że przyjęte założenie, iż $\pi = \frac{p}{q}$ prowadzi do sprzeczności, bo ciąg dodatnich liczb całkowitych nie może być zbieżny do liczby 0. Udowodnimy własności 1, 2 i 3 ciągu (c_n).

1. Jeśli $0 \le x \le \pi$, to $x(\pi - x) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ i $\sin x \ge 0$,
zatem $\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \ge \int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \, dx \ge 0$. Stąd mamy
$0 \le c_n \le \frac{\pi}{n!}\left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej a, np. $a = \frac{q\pi^2}{4}$, jest $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, więc $\lim c_n = 0$, co kończy dowód własności 1.

2. Całkowana funkcja jest dodatnia wewnątrz przedziału $[0, \pi]$, więc całka z niej na tym przedziale jest dodatnia, zatem $c_n > 0$.

3. Ten fragment rozumowania jest najdłuższy. Niech w oznacza wielomian stopnia k. Pochodne funkcji w są więc równe 0 począwszy od $(k+1)$-szej, czyli $w^{(j)}(x) = 0$ dla $j \ge k+1$ i dowolnej liczby x. Zaczniemy od obliczenia całki nieoznaczonej $\int w(x) \sin x \, dx$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int w(x)\sin x \, dx &= -w(x)\cos x + \int w'(x)\cos x \, dx = \\ &= -w(x)\cos x + w'(x)\sin x - \int w''(x)\sin x \, dx .\end{aligned}$$

Sprowadziliśmy zatem problem do obliczenia całki $\int w''(x)\sin x\,dx$, a więc do takiego samego zadania, jak na początku, z tym jednak że udało się nam zmniejszyć o 2 stopień wielomianu, przez który wymnażamy sinus. Powtarzając to rozumowanie wielokrotnie i biorąc pod uwagę to, że pochodne wielomianu w począwszy od pochodnej $(k+1)$-szego rzędu zerują się, otrzymujemy wzór:

$$\int w(x)\sin x\,dx = \cos x[-w(x) + w''(x) - w^{(4)}(x) + \ldots] + \\ + \sin x[w'(x) - w^{(3)}(x) + W^{(5)}(x) - \ldots]$$

– przy czym sumy w nawiasach kwadratowych są skończone, bo od pewnego momentu ich wszystkie składniki są zerami.

Niech teraz $w(x) = [x(\pi - x)]^n$. Jest, oczywiście, $w(x) = w(\pi - x)$. Wobec tego $w^{(j)}(x) = (-1)^j w^{(j)}(\pi - x)$ dla $j = 0, 1, 2 \ldots$ Jest również $\sin 0 = \sin\pi = 0$ oraz $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, skąd

$$\int_0^\pi w(x)\sin x\,dx = \\ = -1(-w(\pi) + w''(\pi) - w^{(4)}(\pi) + \ldots) - \\ - 1(-w(0) + w''(0) - w^{(4)}(0) + \ldots) = \\ = 2(w(0) - w''(0) + w^{(4)}(0) - \ldots).$$

Do stwierdzenia całkowitości liczb c_n wystarczy więc, by liczby $\frac{q^n}{n!}w(0)$, $\frac{q^n}{n!}w''(0)$, $\frac{q^n}{n!}w^{(4)}(0)\ldots$, były całkowite. Z dwumianu Newtona mamy

$$w^{(j)}(x) = [\pi^n x^n - \binom{n}{1}\pi^{n-1}x^{n+1} + \\ + \binom{n}{2}\pi^{n-2}x^{n+2} - \binom{n}{3}\pi^{n-3}x^{n+3} + \ldots + (-1)^n x^{2n}]^{(j)}.$$

Jeśli $j < n$, to każdy składnik sumy $w^{(j)}(x)$ zawiera zmienną x z dodatnim wykładnikiem, więc $w^{(j)}(0) = 0$. Mamy $w^{(n)}(0) = n!\pi^n$, $w^{(n+1)}(0) = -\binom{n}{1}\pi^{n-1}(n+1)!$, $w^{(n+2)}(0) = \binom{n}{2}\pi^{n-2}(n+2)!\ldots$, $w^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$ Dla $j > 2n$ $w^{(j)}(x) = 0$. Jeśli więc $\pi = \frac{p}{q}$, to liczby $\frac{q^n}{n!}w^{(j)}(0)$ są całkowite dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j. To stwierdzenie kończy dowód.

Konkurs

Jak wynika z powyższego artykułu, prosty dowód niewymierności π wcale nie jest taki bardzo prosty i został wymyślony stosunkowo niedawno. W artykule jest też przypomniana pokrótce historia innych dowodów niewymierności π. W związku z tym ogłaszamy otwarty konkurs. Czekamy na elementarne (własnej produkcji) dowody niewymierności π. Jeśli nie będą one zbyt długie, to z chęcią je opublikujemy. A ponadto będzie to z pewnością dobra praca na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

Redakcja

Usuwając Ziemię z centrum wszechświata i czyniąc ją jedną z planet Kopernik burzył fundament całego systemu. Ale Kopernik zbyt głęboko tkwił w wielowiekowej tradycji, by mógł zrobić następne rewolucyjne kroki. Nie potrafił zrezygnować z idei, że jedynie orbity kołowe, jako najdoskonalsze, przystoją ciałom niebieskim; wskutek tego zmuszony był w swym heliostatycznym systemie świata zachować epicykle i deferenty.

Następny rewolucyjny krok uczynił Kepler. On pierwszy zerwał z tradycją „astronomii kinematycznej" stawiającej sobie za zadanie tylko opis ruchu ciał niebieskich i on pierwszy pytał o przyczyny: „A były głównie trzy problemy, których przyczyn, dlaczego jest tak, a nie inaczej, szukałem, a mianowicie liczba, wielkość i ruch sfer". Ale ruch kołowy jest dla Keplera nadal ruchem naturalnym w tym sensie, że nie wymaga siły przyciągającej, która by utrzymywała ciało w stałej odległości od środka.

Wielki Galileusz, który tak przyczynił się do rozwoju nauki o ruchu, nie zastanawiał się nad dynamiką układu planet i siłami działającymi w układzie Kopernika, którego był zwolennikiem i propagatorem. Nigdy nie zaakceptował odkrycia orbit eliptycznych przez Keplera, a także wyrażał zdziwienie, iż ten przypisywał przypływy morza wpływowi przyciągania Księżyca. Wymyślił natomiast własne, kompletne fałszywe wyjaśnienie przypływów, jako zjawiska dowodzącego ruchu obrotowego Ziemi.

U Kartezjusza znajdujemy pierwszą próbę, choć mało jeszcze spójną, utożsamienia fizyki ziemskiej i niebieskiej. W racjonalnej kosmologii Kartezjusza pojawia się po raz pierwszy „siła odśrodkowa", *conatus recedendi a centro* – skłonność ciał do oddalania się od środka – wobec czego potrzebny jest mechanizm temu przeciwdziałający i utrzymujący ciało na orbicie kołowej. Kartezjusz znalazł potrzebne wytłumaczenie w istnieniu wirów subtelnej materii wypełniającej cały wszechświat. To właśnie ciśnienie wywierane przez wir, którego środkiem jest Słońce, miało utrzymywać planety na ich orbitach. Ruch satelitów i spadek swobodny ciał był z kolei wywoływany przez mniejsze wiry, których środkami były planety.

Huygens był chyba jedynym poza Newtonem matematykiem tego okresu zdolnym do wykazania, że siła centralna odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka wywołuje ruch po przecięciach stożkowych. Po ukazaniu się *Zasad* nie mógł, oczywiście, zaprzeczyć ścisłości dowodów matematycznych Newtona, ale nadal nie pogodził się z ideą ciążenia powszechnego.

Historycy nauki są obecnie zgodni co do tego, że to Hooke pierwszy spojrzał inaczej na zagadnienie ruchu planet. Najwcześniejsza zanotowana o tym wiadomość pochodzi z 1666 r., gdy 23 maja Hooke przedstawiał na posiedzeniu Royal Society swą pracę o ruchu ciał po linii krzywej. Mówił wtedy, że „ruch po okręgu jest wynikiem złożenia tendencji do ruchu prostoliniowego po stycznej oraz skłonności dążenia do środka..."

Gdy patrzymy dziś z perspektywy trzech stuleci na Newtona i Hooke'a, zdaje się nie ulegać wątpliwości, że Hooke został potraktowany niesprawiedliwie. Na pewno nie był on w stanie – nie będąc matematykiem – rozwiązać ilościowo zagadnienia ruchu planet. Ale Newton zawdzięczał Hooke'owi wiele. Zresztą sam w przypływie lepszego humoru przyznał się Halleyowi, że listy Hooke'a (1679 – 1680) zwróciły jego uwagę na zagadnienie ruchu planet. Trudno powiedzieć, jak potoczyłyby się wydarzenia, gdyby Hooke nie wskazał Newtonowi nowego podejścia do analizy ruchu krzywoliniowego. Wszak Newton większą część czasu poświęcał na prace alchemiczne oraz studia historyczne i teologiczne, z których zresztą niewiele wynikło. Czy bez impulsu otrzymanego od Hooke'a zająłby się ponownie mechaniką nieba ? Mógłby więc bez uszczerbku dla swej wielkości dać satysfakcję Hooke'owi choćby drobną wzmianką w tekście *Zasad*. Tego jednak nie zrobił.

Jak obliczyć π?

Udowodnimy, że

$$2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ dwójek}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi .$$

Dowód tego faktu będzie bardzo elementarny.

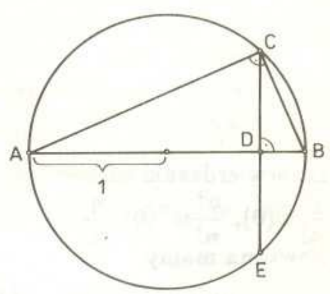
Niech W_m oznacza m-kąt foremny wpisany w koło o promieniu 1. Wówczas, oczywiście,

$$\text{obwód } W_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \text{obwód koła} = 2\pi .$$

Mając wielokąt W_m konstruujemy wielokąt W_{2m} w sposób następujący: Wierzchołki wielokąta W_m dzielą okrąg na m łuków. Łącząc środki tych łuków z wierzchołkami wielokąta W_m otrzymamy wielokąt W_{2m}.

Niech a_m oznacza długość boku wielokąta W_m. Łatwo zauważyć, że $a_4 = \sqrt{2}$. Wobec tego $a_m < \sqrt{2}$ dla $m > 4$.

Lemat. $a_{2m} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_m^2}}$.



Dowód. Niech $|CE| = a_m$.
Pole trójkąta ABC wynosi

$$\frac{1}{2}|AC||BC| = \frac{1}{2}|AB||CD| .$$

Podstawiając

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2-|BC|^2} = \sqrt{4-a_{2m}^2} ,$$
$$|BC| = a_{2m} ,$$
$$|AB| = 2 ,$$
$$|CD| = \frac{1}{2}a_m ,$$

otrzymamy

$$\frac{1}{2}\sqrt{4-a_{2m}^2}\,a_{2m} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}a_m ,$$

więc

$$a_m^2 = a_{2m}^2(4-a_{2m}^2) .$$

Oznaczając $x = a_{2m}^2$ otrzymamy równanie kwadratowe

$$x^2 - 4x + a_m^2 = 0 ,$$

skąd

$$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-4a_m^2}}{2} .$$

Ponieważ $2m > 4$, więc $a_{2m}^2 < 2$ i rozwiązanie z „plusem" odrzucamy. Wobec tego

$$a_{2m}^2 = \frac{4-\sqrt{16-4a_m^2}}{2} ,$$
$$a_{2m} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_m^2}} .$$

Wykorzystamy teraz ten lemat do rekurencyjnego obliczenia a_{2^m}. Otóż, jak wiemy,

$$a_4 = \sqrt{2} ,$$

skąd

$$a_8 = \sqrt{2-\sqrt{4-\sqrt{2}^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}} ,$$

$$a_{16} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} ,$$

itd.

Kontynuując tę procedurę obliczania otrzymamy w końcu

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}},$$

skąd

$$\text{obwód } W_{2^{n+1}} = 2^{n+1}\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}} \to 2\pi.$$

I ostatecznie dzieląc przez 2 mamy

$$2^n\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}} \to \pi.$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli $|BC| = a_{2^{n+1}}$, to

$$|AC| = \sqrt{4 - a^2_{2^{n+1}}} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}}$$

Ponieważ $a_{2^{n+1}}$ jest bardzo małe przy bardzo dużym n, więc $|AC|$ jest bardzo bliskie 2, czyli

$$\sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}} \to 2,$$

co często symbolicznie zapisuje się w postaci

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2.$$

Opracował Piotr HAJŁASZ

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 634. Wielomian $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ o nieujemnych współczynnikach a_j ma n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wtedy $P(k) \geq (k+1)^n$ dla dowolnej liczby naturalnej k.
Rozwiązanie na str. 11

M 635. Gracz A rzuca symetryczną monetę $n+1$ razy, gracz B zaś n razy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że A uzyska więcej orłów niż B?
Rozwiązanie na str. 11

M 636. Udowodnić, że jeśli liczby naturalne a, b, c, n ($n \geq 2$) spełniają równanie $a^n + b^n = c^n$, to $\min(a, b) > n$.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Jarosław KULPA

F 335. Ciężarek zawieszono na sprężynie o znanym współczynniku sprężystości. Na podstawie analizy ruchu harmonicznego, zakładając nieważkość sprężyny, wyznaczono masę ciężarka. Po zważeniu ciężarka okazało się, że jego masa jest mniejsza o Δm. Oceń, jaka była masa sprężyny?
Rozwiązanie na str. 10

F 336. Jaka temperatura ustaliłaby się na powierzchni Ziemi, gdyby nagle zgasło Słońce? Gradient temperatury w głąb Ziemi wynosi 25°C na 1 km, a współczynnik średniego przewodnictwa cieplnego zewnętrznych warstw Ziemi wynosi $\lambda \approx 10$ W/(m·K).
Rozwiązanie na str. 10

Następne pokolenia fizyków rozwijały i udoskonalały mechanikę Newtona. Jak powiedzieliśmy, *Zasady* były dziełem pisanym w języku geometrii, nie ma więc w nich np. tego, co dziś nazywamy równaniami Newtona. Drugie prawo dynamiki Newtona w postaci różniczkowej podał po raz pierwszy Jacob Herman w 1716 r. Leonhard Euler zrobił poważny krok w kierunku przedstawienia fizyki Newtona w języku matematycznym Kartezjusza i Leibniza. Gdy Joseph Louis de Lagrange opracował swą mechanikę analityczną, mógł już z dumą oświadczyć w przedmowie: „W tej książce nie ma w ogóle rysunków. Metody, jakie tu przedstawiam, nie wymagają ani konstrukcji, ani rozważań geometrycznych ..."

Newton dokonał ogromnego dzieła. Oczywiście, wykorzystywał to, co przed nim znaleźli Galileusz, Kartezjusz, Kepler, Hooke i Huygens, choć nie zawsze to przyznawał. Nawet Newton, gdyby urodził się kilkadziesiąt lat wcześniej, nie zdołałby chyba sam zbudować swego systemu. Ale Newton nie zapożyczał po prostu od swoich poprzedników, lecz ich odkrycia i pomysły twórczo przetworzył i połączył w jedną spójną całość. Stał na ramionach gigantów, jednak przewyższył ich ogromem swego intelektu. Lagrange wyraził się o Newtonie, że był najszczęśliwszym z ludzi, gdyż istnieje tylko jeden świat i tylko jeden człowiek mógł ustalić prawa nim rządzące.

Gdy Newton zmarł 20 III 1727 roku, wyprawiono mu wspaniały pogrzeb z udziałem Lorda Kanclerza, wielu książąt i hrabiów. Pochowano go w katedrze Westminster, a długie epitafium na wspaniałym grobowcu kończy się słowami: *Sibi gratulentur mortales, tale tantumque exstitisse humani generis decus* – Niech się radują śmiertelni, że istniała taka ozdoba rodzaju ludzkiego.

Są to fragmenty większego artykułu zamieszczonego w *Postępach Fizyki*, 1987, tom 38, zeszyt 4, str. 315-343.