Pożyteczna sztuczka
– czyli jak inaczej może się przydać odejmowanie

Piotr PISKORSKI

Wszyscy chyba znają sztuczkę – żart „... pomyśl jakąś liczbę, zrób z nią to, co Ci powiem,... Wyszło 1...".

Pokażę inną sztuczkę matematyczną: zgadywanie wielomianów. Chciałbym się nią z Wami podzielić (znaleźć ją można w książce W.W. Sawyera *W poszukiwaniu modelu matematycznego*). Zacznijmy od wielomianu drugiego stopnia. Pomyślcie sobie jakiś wielomian i podajcie jego wartości dla 0,1,2,3,... Wystarczyłoby od 0 do 3, a nawet do 2, ale od przybytku głowa nie boli. Mój kolega podał mi takie liczby: –1,4,15,32,55,84,... Jaki był jego wielomian? Aby go odgadnąć, zapiszę te wartości w linii, a pod spodem ich różnice, różnice różnic,... itd.

w	-1		4		15		32		55		84
1		5		11		17		23		29	
2			6		6		6		6		
3				0		0		0			

Dla wielomianu drugiego stopnia są to trzy wiersze, a dalej same zera.

Można zacząć zgadywać. Otóż, współczynnik przy x^2 to połowa liczby, na której nasze różnice się ustaliły (wiersz **2**), w naszym przypadku $(1/2) \times 6$, czyli 3, wyraz wolny to pierwsza wartość wiersza początkowego **w**, (u nas -1), a współczynnik przy x to różnica pierwszego wyrazu w wierszu **1** i współczynnika przy x^2 (obliczonego przez nas przed chwilą), $5 - 3 = 2$. Wielomian, którego szukaliśmy, to $W(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Wiemy już, jak się to robi. Pozostaje pytanie, dlaczego tak jest. Aby to wykazać, weźmy dowolny wielomian $Q(x) = ax^2 + bx + c$ i jego wartości dla $x = 0, 1, 2, 3$. Otrzymujemy $Q(0) = c$, $Q(1) = a + b + c$, $Q(2) = 4a + 2b + c$, $Q(3) = 9a + 3b + c$. Zróbmy to, co już robiliśmy przed chwilą, wypiszmy trójkąt różnic.

c		$(a+b+c)$		$(4a+2b+c)$		$(9a+3b+c)$
	$(a+b)$		$(3a+b)$		$(5a+b)$	
		$2a$		$2a$		
			0			

Oto, na czym polega ta sztuczka. Jest już na pewno jasne, dlaczego można szybko i bez problemów w ten sposób zgadywać współczynniki wielomianu. Sztuczkę taką łatwo opracować i dla innych stopni wielomianów. Spróbujcie sami opracować metodę zgadywania, na przykład, dla wielomianu stopnia trzeciego. Niecierpliwi mogą skorzystać z trójkąta różnic podanego poniżej dla $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

d		$(a+b+c+d)$		$(8a+4b+2c+d)$		$(27a+9b+3c+d)$		$(64a+16b+4c+d)$
	$(a+b+c)$		$(7a+3b+c)$		$(19a+5b+c)$		$(37a+7b+c)$	
		$(6a+2b)$		$(12a+2b)$		$(18a+2b)$		
			$6a$		$6a$			
				0				

Jak widać, sposób odgadywania w tym przypadku jest trudniejszy. Jaki? Odpowiedzcie na to pytanie sami. Można by tę zabawę ciągnąć dalej. Zobaczmy, ile wierszy niezerowych będzie miał trójkąt dla wielomianu k-tego stopnia. Mamy powyżej odpowiedź dla k wynoszącego 2 i 3.

Zobaczmy, jak to wygląda dla $k = 1$. Wielomian $W(x) = ax + b$, przyjmuje wartości:

b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	...
a	a	a	a	a	a	...
0	0	0	0	0	...	

czyli ma dwa wiersze różne od zera. Porównajmy z innymi przypadkami: wielomian drugiego stopnia ma trzy rzędy, trzeciego – cztery. Czyżby zawsze liczba wierszy była o jeden większa od stopnia wielomianu? Nie będziemy tego dowodzić, sprawdzimy tylko, czy nasz wniosek jest prawdziwy, na przykład, dla x^6, najprostszego wielomianu stopnia szóstego.

0	1	64	729	4096	15625	46656	117649
1	63	665	3367	11529	31031	70993	
62	602	2702	8162	19502	39962		
540	2100	5460	11340	20460			
1560	3360	5880	9120				
1800	2520	3240					
720	720						
0							

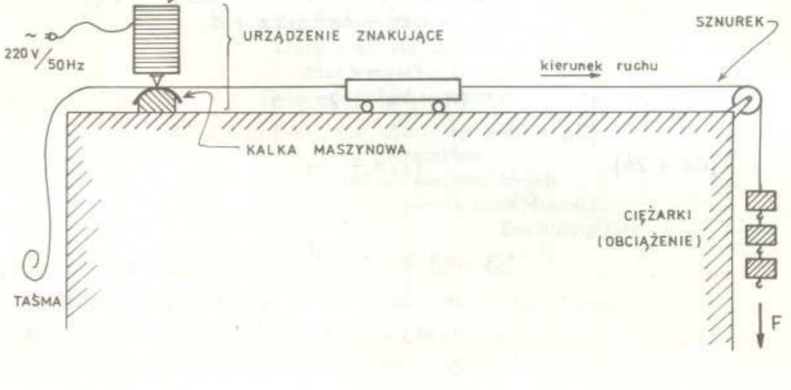
Otrzymaliśmy siedem niezerowych wierszy. Chyba się zgadza...

Czy trójkąty różnic mogą się przydać do czegoś innego? Ależ tak. Możliwość ich zastosowania jest przeogromna. Jednym z zastosowań metody różnic skończonych, jak oficjalnie nazywają się nasze trójkąty, jest znajdowanie kolejnej lub brakującej liczby w jakimś ciągu bez znajdowania jego wzoru. W bardzo wielu przypadkach udaje się ją obliczyć w poniższy sposób. Jest to szczególnie łatwe, gdy mamy do czynienia z ciągiem wielomianowym (o ile mamy wystarczająco dużo informacji o tym ciągu). Zajmę się tylko tym przypadkiem. Weźmy ciąg $?_1; 6; 23; 58; 117; 206; ?_2$. Załóżmy, że są to wyrazy jakiegoś wielomianu stopnia trzeciego. Wypiszmy dla niego trójkąt różnic.

?	?	$?_1$	6	23	58	117	206	$?_2$	?	?
		C	17	35	59	89	Z			
		B	18	24	30	Y				
		A	6	6	X					

Zauważmy, że ostatni wiersz w trójkącie będzie zawierał szóstki, mamy więc $A = 6$ i $X = 6$. Obliczmy B: $18 - B = 6$, czyli $B = 12$. Postępując tak samo otrzymujemy: $Y = 36$, $C = 5$, $Z = 125$, $?_1 = 1$ oraz $?_2 = 331$. W ten sposób obliczyliśmy brakujące wyrazy ciągu nie znając i nie znajdując jego wzoru. Możemy go jednak szybko znaleźć. Rozwiążcie to sami. Odpowiedź, jaki to jest ciąg, znajdziecie na końcu artykułu. Dla niektórych ciągów metoda ta zawodzi lub jest mało skuteczna. Przykładami takich ciągów są 5^n i $n!$...

Na koniec krótko o praktycznym zastosowaniu metody różnic skończonych w opracowywaniu wyników doświadczenia z fizyki. Przyjrzyjmy się doświadczeniu.



Rozwiązanie zadania F 888.
Efekty dyfrakcyjne pierwszego rzędu pojawią się przy spełnieniu warunku $d \sin\theta = \lambda$, gdzie θ oznacza kąt ugięcia fali na pileczce. Ponieważ $\sin\theta \approx \frac{d}{2x}$ ostatecznie otrzymujemy $x \approx \frac{d^2}{2\lambda} = 1,3$ km.

Rozwiązanie zadania F 884.
Pole magnetyczne elektromagnesu nie może przekroczyć stanu nasycenia. Rozsuńmy na małą odległość x belkę i magnes, wówczas w szczelinie pojawi się pole magnetyczne o energii $E = \frac{1}{2\mu_0}B^2 Sx$, gdzie S jest powierzchnią styku. Ta energia jest równa pracy, jaką należało wykonać rozsuwając belkę i elektromagnes $W = F \cdot x$, stąd siła przyciągania $F = \frac{1}{2\mu_0}B^2 S$. Dzieląc przez S otrzymujemy ciśnienie $p = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = 1,9 \cdot 10^6$ Pa $\approx$ 19 atm.

Rozwiązanie zadania M 681.
Wystarczy udowodnić, że $a_1 > [2n/3]$. Jeżeli by tak nie było, to $3a_1 \le 2n$, skąd, jak łatwo zauważyć, wśród liczb $\{n+1,\ldots,2n\}$ byłyby co najmniej dwie różne wielokrotności a_1. Oczywiście, każda z liczb $a_2,\ldots,a_n$ też ma wielokrotność wśród liczb $\{n+1,\ldots,2n\}$. Łącznie otrzymalibyśmy co najmniej $n+1$ różnych liczb w zbiorze $\{n+1,\ldots,2n\}$ (gdyż $\mathrm{NWW}(a_i,a_j) > 2n$ dla $i \neq j$). Stąd sprzeczność.

Do wózka ściąganego przez ciężarek na sznurku doczepiona jest taśma papierowa. Podczas ruchu wózka zaznaczane są na niej kropki co 0,02 s. W ten sposób rejestrowana jest droga przebywana przez wózek. Pierwsze kropki były tak gęsto, że nie mogłem paru odróżnić, a co dopiero zmierzyć odległości między nimi – musiałem je odrzucić. Podane odległości to droga od początku taśmy do kolejnej (nie wiemy której) kropki. Oto otrzymane dane (mierzone w centymetrach): 2; 2,5; 3,3; 4,4; 5,75; 7,4; 9,33; 11,56; 14,09; 16,92;... Załóżmy, że tworzą one ciąg wielomianowy. Wypiszmy kolejne wiersze różnic:

2	2,5	3,3	4,4	5,75	7,4	9,33	11,56	14,09	16,92
0,5	0,8	1,1	1,35	1,65	1,93	2,23	2,53	2,83	
0,3	0,3	0,25	0,3	0,28	0,3	0,3	0,3		
0	-0,05	0,05	-0,02	0,02	0	0			

Zauważmy, że różnice w czwartym wierszu różnią się nieznacznie, prawie wszystkie są równe 0. Przyjmując, że są równe zeru, otrzymalibyśmy trzy niezerowe wiersze. Byłby to więc ciąg wyrazów wielomianu drugiego stopnia. I rzeczywiście, w ruchu jednostajnie przyspieszonym droga jest proporcjonalna do kwadratu czasu (książki podają wzór $s = at^2/2$). W ten sposób otrzymaliśmy zależność (a nie konkretny wzór) drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Można się zastanawiać, jak tą metodą opracowywać ciągi innego typu niż wielomiany.

Nasz szukany ciąg to: $a_n = n^3 + 3n^2 + n + 1$.

Strefy polarne chyba zawsze kojarzą się z zimnem i mrokiem. Wszyscy bowiem wiemy, że w okolicach ziemskich biegunów Słońce jest zawsze widoczne nisko nad horyzontem, bywają dłuższe okresy, gdy w ogóle nie pojawia się nad horyzontem i w rezultacie jest tam zimno i niegościnnie. Tak jest na Ziemi, ale czy na każdej planecie? Otóż, Uran jest pod tym względem wyjątkiem. Jego oś obrotu leży niemal w płaszczyźnie jego orbity, a zatem są okresy, gdy Słońce niemal prostopadle oświetla bieguny planety. Nie wynika wprawdzie z tego, że wtedy jest tam gorąco, bo Uran w ogóle jest daleko od Słońca, niemniej jednak strefa gorąca formalnie obejmuje też bieguny. Zresztą z tego samego powodu strefy polarne sięgają do równika planety. Ciekawe, gdzie wobec tego są na Uranie strefy umiarkowane?

*

Jak hamowanie wpływa na prędkość? Chociaż pytanie brzmi niepoważnie, okazuje się jednak, że odpowiedź nie musi być standardowa. Sztuczny satelita, wskutek oporu stawianego mu przez szczątkową atmosferę na wysokości kilkuset kilometrów, na pewno traci energię. Ale przy ruchu keplerowskim energia $\mathcal{E}$ na orbicie wiąże się jednoznacznie z wielkością półosi a tej orbity:

$$a = -\frac{\mathrm{G}Mm}{2\mathcal{E}},$$

gdzie M i m to masy Ziemi i satelity, G – stała grawitacji. W ruchu po elipsie energia jest ujemna (półoś orbity jest dodatnia), a więc jej malenie musi powodować malenie półosi. Satelita więc, wskutek oporu powietrza opada (co jest zgodne z intuicją) – ale na niższej orbicie musi poruszać się szybciej, bo tego wymaga trzecie prawo Keplera, a to już nie jest takie oczywiste. Krótko mówiąc, hamowanie (byle słabe!) powoduje wzrost prędkości.