Pociągające zaokrąglenia

Kiedy 2 400 lat temu okazało się, że świat jest zbyt bogaty na to, by można było go opisać za pomocą stosunków dwu liczb naturalnych, w naturalny sposób postanowiono posiadany zbiór liczb wzbogacić i tak powstały liczby rzeczywiste. Konkretnie zrobił to Eudoksos przy użyciu zmyślnie wprowadzonej teorii proporcji, ale nie to jest tu ważne.

Z początku (a początek ten trwał ponad dwa tysiące lat) wszystko było w porządku. Proporcje Eudoksosa (nazywane liczbami rzeczywistymi dopiero od XIX wieku) służyły najpierw matematykom, potem fizykom, technikom, w końcu całej nauce (tej zwanej po angielsku *science*, a nie tej zwanej *art*). Służyły ofiarnie i uczciwie. Zło ujawniło się dopiero wtedy, gdy zaczęto przyglądać się im samym (zamiast ich po prostu używać). Okazało się mianowicie, że przeważająca część z nich nigdy nikomu do niczego potrzebna nie była i nie będzie.

W wyniku dowolnego pomiaru otrzymać możemy jedynie liczbę wymierną – tak już są skonstruowane nasze przyrządy. Złudzenie, że niektóre pomiary dają inne wyniki, bierze się stąd, iż jednostkę, w której mierzymy, możemy mianować liczbą niewymierną – np. stwierdzając, że jakiś kąt jest prosty możemy sądzić, iż zmierzyliśmy $\frac{\pi}{2}$, ale będzie to tylko zakamuflowany opis tego, że jest to $\frac{1}{4}$ kąta pełnego.

Nasuwa się więc pytanie, po co było wprowadzać także inne liczby (poza wymiernymi), skoro i tych jest aż nadto. Bo istotnie, wszystkich liczb wymiernych też nie potrzebujemy. Czy ktoś może rzeczywiście do czegoś rozsądnego potrzebować liczby, powiedzmy,

$$10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$$

albo czegoś jeszcze większego ? W *Kalejdoskopie matematycznym* Steinhausa można znaleźć szereg uwag na ten temat. O ile mi wiadomo, w *Księdze Guinnessa* nie ma odnotowanej największej liczby, jaka była komuś (poza matematykami) do czegoś potrzebna – nie wypada jednak wątpić, że liczba taka istnieje.

Niedwuznacznie zostało wyżej napisane, że matematycy zajmują się rzeczami niekoniecznie rozsądnymi. Nadając tej wypowiedzi sens pickwickowski spróbujmy jednak odpowiedzieć na pytanie, dlaczego matematycy natworzyli tyle liczb, dla których realne odpowiedniki *de facto* nie istnieją. Odpowiedź, że musieli, jest tylko odwlekaniem odpowiedzi – co ich, mianowicie, do tego zmuszało ?

Faktyczna odpowiedź tkwi już u samego źródła. Kiedy stwierdzono, że przekątna kwadratu nie jest wymierną wielokrotnością jego boku, do wyboru były trzy możliwości: albo uznać, że nie należy ich porównywać (na co żaden uczony nigdy przystać nie powinien), albo uznać, że nie zawsze prawdziwe jest twierdzenie Pitagorasa (czyli że zachodzi tylko dla trójkątów, których długości boków są wymiernymi wielokrotnościami tzw. trójek pitagorejskich), albo wreszcie dopuścić istnienie liczby $\sqrt{2}$. To ostatnie rozwiązanie dawało przyjemną okrągłość teorii i na nie się zdecydowano. Tyle że kontynuując dbałość o kształt teorii trzeba się było zdecydować i na inne liczby niewymierne. Trzeba więc było stworzyć elegancką teorię wszelkich liczb – idea istnienia kresu zbioru ograniczonego spełniała wszelkie wymogi pod tym względem (czy też równoważna teoria przekrojów). W konsekwencji otrzymano (właśnie dla owej ogólności i elegancji)

Niech dany będzie zbiór X. Miara m (unormowana... itd.) jest to funkcja, która przyporządkowuje każdemu podzbiorowi zbioru X pewną liczbę nieujemną w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:
1) $m(\emptyset) = 0, \quad m(X) = 1$.
2) *Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są rozłącznymi podzbiorami zbioru X, to*
$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \\ = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_n).$$

Może wyjaśnimy tę bardzo długą nazwę: miara unormowana...
Otóż, słowo unormowana oznacza, że $m(X) = 1$. Warunek 2) nazywa się skończoną addytywnością. Wprowadza się też w matematyce miary, które nie muszą spełniać warunku $m(X) = 1$. Wówczas nie nazywa się ich unormowanymi. W warunku zaś 2) często sumy skończone zastępuje się sumami nieskończonymi i wówczas mówi się, że miara jest przeliczalnie addytywna. Wreszcie, na ogół nie zakłada się, że miara mierzy wszystkie podzbiory, to znaczy zakłada się, że funkcja m jest określona tylko dla niektórych podzbiorów zbioru X.

W dalszym jednak ciągu mówiąc o mierze będziemy mieli na myśli miarę unormowaną, skończenie addytywną, mierzącą wszystkie podzbiory zbioru X (por. mój artykuł w *Delcie* 11/1991). No dobrze, ale co to ma wspólnego z dzieleniem tortu?

Otóż, dla każdej osoby dany kawałek tortu przedstawia jakąś wartość. Umawiamy się, że cały tort dla każdej osoby ma wartość 1. (Można się, na przykład, umówić, że owa wartość to ilość pieniędzy, które ta osoba zapłaciłaby, aby dostać dany kawałek tortu, przy czym waluta jest tak dobrana, że za cały tort ta osoba chciałaby zapłacić 1.)

A więc takie przypisywanie wartości różnym kawałkom tortu to nic innego tylko miara!

Oczywiście, ponieważ różne osoby mają różne preferencje – jeden woli nawet dostać mniejszy kawałek, byle z rodzynkiem – więc dla różnych osób dany kawałek tortu ma inną wartość. Czyli, innymi słowy, mamy n miar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ opisujących gusty osób czekających na tort.

Miary te mają jeszcze jedną własność. Mianowicie, jeśli kawałek K przedstawia dla i-tej osoby wartość $m_i(K) > 0$, to może ona z tego kawałka odciąć mniejszy $K' \subseteq K$, taki że $m_i(K')$ jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od $m_i(K)$. Czyli, innymi słowy, i-ta osoba może z kawałka K odciąć część K' o upatrzonej z góry wartości. Własność tę nazywa się nieograniczoną podzielnością. A więc, jak zauważył Banach, tłumacząc na język teorii miary powyższą procedurę dzielenia tortu otrzymujemy natychmiast dowód następującego twierdzenia.

Jeśli $m_1, m_2, \ldots, m_n$ są miarami nieograniczenie podzielnymi, unormowanymi, skończenie addytywnymi, mierzącymi wszystkie podzbiory zbioru X, to tak możemy rozbić zbiór X na zbiory rozłączne $K_1, K_2, \ldots, K_n$, że

$$m_1(K_1) \geq \frac{1}{n}, \quad m_2(K_2) \geq \frac{1}{n}, \ldots \quad \ldots, \quad m_n(K_n) \geq \frac{1}{n}.$$

Zauważmy, że warunek $m_i(K_i) \geq \frac{1}{n}$ oznacza, że w subiektywnym odczuciu i-tej osoby dostała ona nie mniej niż $1/n$-tą część tortu.

Jak już zauważyliśmy, dowód tego twierdzenia jest dokładnym powtórzeniem procedury podziału pragmatycznego.

Powiedzieliśmy, że istnieje wiele modyfikacji pojęcia miary. Banach zresztą sformułował swoje twierdzenie dla inaczej zdefiniowanej miary. Twierdzenie Banacha doczekało się uogólnienia. W 1940 r. radziecki matematyk Liapunow udowodnił bardzo abstrakcyjne twierdzenie o tzw. miarach wektorowych, z którego to twierdzenia wynika w szczególności twierdzenie Banacha. Ciekawe, czy Liapunow wiedział coś o podziale pragmatycznym tortu?

teorię, w której istotnie używane liczby (z powodu których teorię tworzono) stanowią zaniedbywalny margines. Nawet te liczby, od których ulepszanie się zaczęło – pierwiastki z liczb naturalnych czy wymiernych – też okazują się marginesowe. Nawet jeśli za przyzwoitsze liczby uznamy te, które są pierwiastkami dowolnych wielomianów o współczynnikach wymiernych (liczby algebraiczne), to i tak tych innych (przestępnych) będzie nieskończenie wiele razy więcej.

Pierwsze liczby przestępne odkrył Liouville w 1844 roku. Były to liczby postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie c_i to dowolne z liczb naturalnych spełniających warunek $1 \leq c_i \leq 9$. To, że liczb przestępnych jest tak wiele, uświadomił matematykom trzydzieści lat później Cantor.

Jest cały szereg fajnych twierdzeń o liczbach należących do nieużywanej większości – większość z tych twierdzeń mówi o ich ekspansjonistycznym charakterze, np.:
jeśli α i β są liczbami algebraicznymi $(\alpha \neq 0,\ 1)$ *i β jest niewymierna, to α^β jest liczbą przestępną.*
Ale faktycznie wskazują one, że w pogoni za ładnie ogólnymi teoriami matematycy zapędzili się daleko poza świat (cóż tu ukrywać) normalnych ludzi.

Zjawisko opisane tu na przykładzie liczb jest w matematyce zjawiskiem typowym. Podobnie, goniąc za odpowiednio zaokrągloną teorią funkcji wyprodukowano dla niej definicję tak ogólną, że dziś mamy funkcje ciągłe nigdzie nie różniczkowalne, wszędzie różniczkowalne i równocześnie w żadnym przedziale nie monotoniczne itd., itp. Właściwie w każdej gałęzi matematyki spotykamy podobne sytuacje. Ta część matematyki, która powstała z zewnętrznej (w stosunku do matematyki) potrzeby, jest w każdej z jej gałęzi znikomo mała. Stanisław Lem ustami bohaterów *Księgi robotów* twierdzi, że aby pokonać smoka, trzeba stworzyć ogólną teorię smoków, w której ten smok, o którego chodzi, będzie szczególnym, łatwym do rozwiązania przypadkiem. Rzeczywiście, często tak jest łatwiej. Matematycy poszli jednak dalej – ogólną teorię smoków gotowi są tak rozbudować, że same smoki staną się mało zauważalnym obiektem zainteresowania powstałej teorii, ale za to teoria nabierze pociągających, opływowych, wręcz zmysłowo na jej twórców oddziałujących kształtów.

Ale, Szanowni Niematematycy, przyznajcie: czyż nie jest to sytuacja (jak powiedział marszałek Radetzky na polu bitwy pod Custozzą) godna zawiści ?

Marek KORDOS

Żył kiedyś człowiek,
który uczył się, jak zabijać smoki
i oddał wszystko, co miał,
aby opanować tę sztukę.

Po trzech latach
osiągnął mistrzostwo.
Nigdy jednak nie miał okazji
wykorzystać swoich umiejętności.

Dschuang Dsi

I wtedy zaczął uczyć innych,
jak zabijać smoki.

René Thom

Powyższy wiersz wraz z pointą (wybitnego matematyka, laureata Medalu Fieldsa) stanowi motto książki matematycznej Th. Bröcker & L. Lander *Differentiable Germs and Catastrophes.*