mała delta

O dzieleniu batonika na trzy równe części i podobnie trudnych problemach

Jeśli masz brata albo siostrę, to na pewno wiele razy przychodziło Ci dzielić na dwie części ciastko, czekoladkę, jabłko czy np. Twój ulubiony batonik *Mars*. Zadanie to całkiem proste, jeżeli, oczywiście, pominąć sam przykry obowiązek dzielenia się z bliźnim.

Gorzej sprawa wygląda, gdy poza jednym bratem albo siostrą, rodzice postarali się o jeszcze jednego brata lub siostrę. Nie dość, że Tobie przypadnie mniejsza część batonika, to i podzielić go sprawiedliwie na trzy części jest sprawą nieprostą. Zadanie upraszcza się, gdy masz troje rodzeństwa – batonik dzielisz na połowę, a połówki na połówki. Moja metoda dzielenia na trzy równe części polega właśnie na wielokrotnym dzieleniu na cztery. A więc, batonik dzielimy na cztery części, trzy rozdajemy, a pozostałą ćwiartkę znów dzielimy na cztery, rozdajemy trzy itd. Jeśli będziemy dostatecznie cierpliwi, to każdemu przypadnie jedna trzecia całego batonika.

Niestety, dzielić batonik do nieskończoności mogą tylko matematycy. Zobaczmy więc, jaką część batonika dostaniemy po pierwszym, drugim i trzecim podziale. Po pierwszym $\frac{1}{4} = 0,25$, po drugim $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$, po trzecim $\frac{5}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64} = 0,328125$. A więc wystarczy trzy razy dzielić, by bardzo zbliżyć się do $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$

Moją metodę podziału na trzy równe części można fachowo nazwać iteracyjną, tzn. taką, która do celu prowadzi za pomocą nieskończenie wielu takich samych kroków. Jeżeli, jak w naszym przypadku, już po kilku krokach uzyskujemy dobrą dokładność, to metodę określamy jako szybko zbieżną.

Dzieląc batonik wiele razy na cztery zauważyliśmy, że

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

A czemu równa się suma nieskończenie wielu wyrazów, z których każdy jest nie jedną czwartą, jak poprzednio, ale jedną drugą wyrazu poprzedzającego? Tzn. interesuje nas suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Wyobraźmy sobie Jasia łakomczucha, który wrócił ze szkoły do domu i na stole znalazł nie batonik *Mars*, ale *Prince Polo*, a obok kartkę od Mamy: „Podziel się z Kasią". Kasia to siostra Jasia, ale nie ma jej w domu, bo gra „w gumę" na podwórku. Jaś odcina połowę batonika i zjada. Kasia nie wraca, a Jaś bardzo lubi słodycze, więc po pewnym czasie odcina połówkę połówki. Kasia nadal gra „w gumę", a Jaś odcinając za każdym razem połowę pozostającej części zjada kolejno jedną ósmą batonika, jedną szesnastą itd. Jeśli Kasia nie wróci do domu, to Jaś zje, oczywiście, cały batonik. A zatem

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

Na koniec jeszcze jedno zadanie dla tych, którzy zrozumieli moje wywody. Ile wynosi nieskończona suma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots ?$$

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI