Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

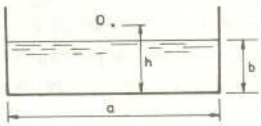
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

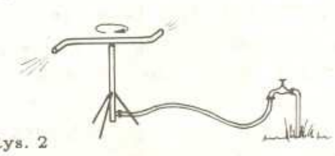
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1992

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 123 (WT=1,97) i 124 (WT=2,87) z numeru 9/1991

Adam Sikorski	– Lublin	38,29
Paweł Perkowski	– Szczecin	36,05
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	17,33
Tomasz Wietecha	– Tarnów	15,88
Przemysław Gworys	– Częstochowa	15,20



Rys. 1


Rys. 2

Zadania z fizyki nr 139, 140

Redaguje Jerzy B. BROJAN

139. Na ekranie obserwujemy prążki powstałe w wyniku interferencji światła z dwóch niejednakowo silnych źródeł spójnych. Natężenie oświetlenia ekranu w środku prążków jasnych jest n razy większe niż natężenie oświetlenia w środku prążków ciemnych. Ile razy większe jest natężenie oświetlenia ekranu przez silniejsze źródło (gdy słabsze jest wyłączone) od natężenia oświetlenia przez słabsze (gdy silniejsze jest wyłączone)?

140. Prostopadłościenne naczynie ma szerokość a, a ciecz wypełnia je do wysokości b (rys.1). Naczynie może się obracać swobodnie wokół osi O prostopadłej do płaszczyzny rysunku i leżącej w odległości h od dna oraz w odległości $\frac{a}{2}$ od ścianek bocznych. Jaki związek muszą spełniać wielkości a, b i h, aby przedstawione na rysunku poziome położenie naczynia było stabilne, tzn. aby po małym odchyleniu naczynie powracało do pozycji poziomej? Przyjąć, że masa samego naczynia jest pomijalnie mała w porównaniu do masy cieczy i pominąć grubość ścianek.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1992

Przypominamy treść zadań:

131. Młynek Segnera (rys.2) działa na zasadzie odrzutu: do rurki z zagiętymi końcami doprowadza się w środku wodę, która wypływa przez końce wprawiając rurkę w ruch obrotowy. Jeśli potraktujemy młynek jako silnik, to ile wynosi jego moc? Pompa zasila młynek wodą pod ciśnieniem p, a dopływ wody na jednostkę czasu jest równy $\frac{m}{t}$. Długość każdej z części rurki wynosi r, a prędkość kątowa – ω. Pominąć lepkość wody.

132. Solenoid bez rdzenia ma kształt linii śrubowej o n zwojach, długości l i promieniu przekroju r, przy czym $\frac{l}{n} \ll r \ll l$. Obliczyć siłę ściskającą solenoid (działającą na końce wzdłuż osi), gdy płynie przez niego prąd o natężeniu I.

131. Moc pompy jest dana wyrażeniem

$$P_1 = p\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{p}{\rho}\frac{m}{t},$$

gdzie ρ – gęstość wody. Pomijamy tu dla uproszczenia energię kinetyczną wody w przewodzie zasilajacym młynek, tzn. zakładamy, że jest on dość szeroki (w przeciwnym przypadku należałoby zastąpić we wzorach ciśnienie początkowe p wyrażeniem $p + \frac{1}{2}\rho v_0^2$, gdzie v_0 – prędkość początkowa wody). Prędkość wypływu wody z naczynia, w którym ciśnienie wynosi p, można obliczyć z równania Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii) – w wyniku otrzymuje się

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}.$$

Rozpatrując ruch wody w obracającym się układzie odniesienia zwiazanym z rurką, należy dodać do ciśnienia p ciśnienie odśrodkowe. Jego różniczka jest dana wyrażeniem $\rho \cdot a_{\text{odśr}} \cdot dr = \rho\omega^2 r dr$; po scałkowaniu mamy $\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$, zatem prędkość wypływu wody względem rurki wynosi

$$v_w = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\right)} = \sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2}.$$

W układzie inercjalnym (nie obracającym się) prędkość wypływającej wody jest równa $v_{\text{in}} = v_w - \omega r$. Zatem moc, którą młynek traci na rozpryskiwanie wody, jest równa

$$P_2 = \frac{mv_{\text{in}}^2}{2t} = \frac{m}{2t}\left(\sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2} - \omega r\right)^2.$$

Odejmując P_2 od P_1 otrzymujemy moc silnika

$$P = P_1 - P_2 = \frac{m}{t}\left[\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2} - \omega r\right)^2\right].$$

Wyrażenie to można sprowadzić do prostszej postaci

$$P = \frac{m}{t}\omega r\left(\sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2} - \omega r\right).$$

Uwaga. Zadanie można również rozwiązać rozpatrując siły wywierane przez wodę na rurkę – należy jednak obok siły odrzutu uwzględnić także siłę Coriolisa działającą wzdłuż całej długości rurki.

132. Kurczenie się spirali jest związane z wykonywaniem przez nią pracy kosztem energii magnetycznej. Aby usunąć z naszych rozważań inne źródła energii, załóżmy, że solenoid tworzy bezoporowy obwód zamknięty. Wtedy strumień pola przez jego wnętrze pozostaje stały, a zatem – przy ustalonym polu przekroju – także pole magnetyczne jest stałe. Energię pola magnetycznego wewnątrz długiego solenoidu znajdujemy bądź opierając się na wzorze $E_m = \frac{1}{2}LI^2$, bądź mnożąc energię na jednostkę objętości $\frac{1}{2\mu_0}B^2$ przez objętość Sl (gdzie $S = \pi r^2$ jest polem przekroju):

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2 Sl.$$

Przyrównując zmianę tej energii do pracy $F\Delta l$ otrzymujemy

$$F = \frac{1}{2\mu_0}B^2 S,$$

a podstawiając $B = \mu_0 In/l$ mamy ostateczny wynik

$$F = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{In}{l}\right)^2 S.$$

Zadania z matematyki nr 241, 242

Redaguje Marcin E. KUCZMA

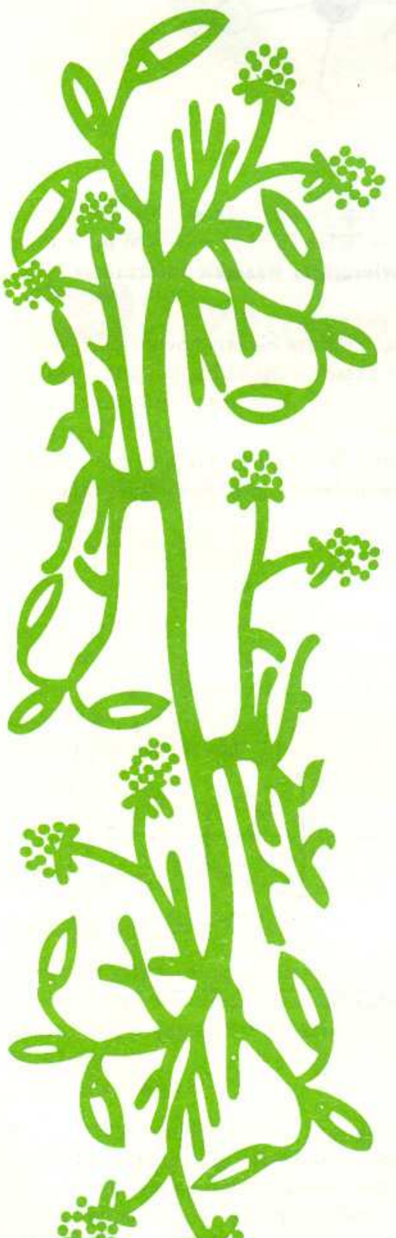
241. W okrąg Ω wpisano czworokąt $ABCD$, którego boki AD i CD są różnej długości. Na przekątnej AC znajdujemy punkt M taki, że $|\angle CBM| = |\angle ACD|$. Przez punkty B, M oraz punkt przecięcia przekątnych czworokąta prowadzimy okrąg. Dowieść, że jest on styczny do Ω.

242. W każdym wierzchołku trójkąta ABC umieszczamy liczbę 1. Zgodnie z ustalonym kierunkiem obiegu obchodzimy kolejno wierzchołki pozostawiając w danym wierzchołku połowę liczby tam się znajdującej, drugą jej połowę dodając do liczby znajdującej się w następnym wierzchołku. Z otrzymanej tam sumy znów pozostawiamy połowę, resztę dodając do następnej liczby itd. Rozpoczynamy – dla ustalenia uwagi – od wierzchołka A. Po n-krotnym obejściu trójkąta mamy w punkcie A liczbę a_n. (Na przykład, po pierwszym obejściu, w wierzchołkach A, B, C znajdują się odpowiednio liczby $\frac{11}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$; tak więc $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{11}{8}$; dalsze wartości: $a_2 = \frac{95}{64}$, $a_3 = \frac{771}{512}$, ...) Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu (a_n).

Zadanie 242 zaproponował pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 223 (WT=2,04) i 224 (WT=2,65) z numeru 8/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,17
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	39,90
Leszek Krawczyk	– Włodawa	36,37
Mirosław Matlęga	– Skoczów	35,79



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1992

Przypominamy treść zadań:

233. Udowodnić nierówność $\frac{y^2-z^2}{z+x} + \frac{z^2-x^2}{x+y} + \frac{x^2-y^2}{y+z} \geqslant 0$ dla $x, y, z \geqslant 0$.

234. Dla danych liczb naturalnych $n, k \geqslant 2$ obliczyć wartość sumy $\sum |A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k|$ (sumowanie po wszystkich uporządkowanych układach $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$).

233. Oznaczmy rozważane wyrażenie przez $F(x, y, z)$ oraz wprowadźmy zmienne $u = 1/(y+z)$, $v = 1/(z+x)$, $w = 1/(x+y)$. Wówczas

$$\frac{y^2-x^2}{z+x} = \frac{y+x}{z+x}(y-x) = \frac{1/w}{1/v}\big((y+z)-(z+x)\big) = \frac{v}{w}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right) = \frac{v^2-uv}{uvw}$$

i podobnie przekształcamy pozostałe dwa składniki sumy określającej $F(x, y, z)$. Stąd

$$F(x, y, z) = \frac{1}{uvw}\big((u^2+v^2+w^2)-(vw+wu+uv)\big) \geqslant 0$$

(na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza).

234. Niech $\mathbf{P}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Dla dowolnego zbioru $M \in \mathbf{P}$ oznaczmy przez $l(M)$ liczbę uporządkowanych układów $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ $(A_i \in \mathbf{P})$ o tej własności, że

$$A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k = M. \tag{1}$$

Rozważana w zadaniu suma równa się

$$s = \sum_{M \in \mathbf{P}} l(M) \cdot |M|. \tag{2}$$

Skorzystamy teraz z następującej własności różnicy symetrycznej:

$$K \dot{-} L = M \iff K \dot{-} M = L \qquad \text{(dla dowolnych zbiorów } K, L, M\text{)}. \tag{3}$$

Niech zbiór $M \in \mathbf{P}$ będzie ustalony i przypuśćmy, że wybraliśmy w dowolny sposób zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1} \in \mathbf{P}$. Istnieje wówczas dokładnie jeden zbiór $A_k \in \mathbf{P}$, dla którego zachodzi związek (1), mianowicie zbiór $A_k = (A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_{k-1}) \dot{-} M$; wynika to z równoważności (3) dla $K = A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_{k-1}$, $L = A_k$. Wobec tego $l(M)$ równa się liczbie wszystkich uporządkowanych układów $(A_1, A_2, \ldots, A_{k-1})$. Ponieważ każde A_i wybieramy niezależnie spośród wszystkich 2^n zbiorów rodziny $\mathbf{P}$, zatem $l(M) = 2^{n(k-1)}$ (niezależnie od M (!)).

Dla każdej liczby naturalnej $m \leqslant n$ w rodzinie $\mathbf{P}$ mamy $\binom{n}{m}$ zbiorów m-elementowych M. Tak więc wartość sumy (2) wynosi

$$s = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 2^{n(k-1)} m = 2^{nk-n} \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} m =$$

$$= 2^{nk-n} \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = n\, 2^{nk-n} \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} =$$

$$= n\, 2^{nk-n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = n\, 2^{nk-n} \cdot 2^{n-1} = n\, 2^{nk-1}.$$