Teleskop Hubble'a niepotrzebny?

Jan KALINOWSKI

Zdolność rozdzielcza teleskopów naziemnych jest ograniczona w istotny sposób przez atmosferę ziemską. Zamiast ostrych obrazów odległych gwiazd w teleskopie widać rozmazane, migocące plamki o wielkości kątowej co najmniej pół sekundy. Dzieje się tak dlatego, że światło, zanim wpadnie do teleskopu, musi przejść przez grubą warstwę atmosfery podlegającej ciągłym zmianom na skutek lokalnych turbulencji. Zniekształcenia obrazu na skutek turbulencji są znacznie większe niż spowodowane dyfrakcją światła w instrumencie obserwacyjnym. Dlatego zdolność rozdzielcza dużych teleskopów nie jest istotnie lepsza od zdolności rozdzielczej teleskopów o rozmiarach 10–20 cm. Jest to szczególnie ważne teraz, gdy mają niedługo powstać teleskopy o rozmiarach rzędu 10 metrów.

Próbuje się temu zaradzić na różne sposoby. Najlepszym rozwiązaniem jest umieszczenie teleskopu w przestrzeni kosmicznej. Jest to jednak bardzo kosztowne przedsięwzięcie, a doświadczenia z umieszczonym w 1990 roku na orbicie okołoziemskiej teleskopem Hubble'a pokazują, że nie jest to wcale łatwe zadanie. Tańszy i stosowany od dawna sposób polega na umieszczaniu teleskopów wysoko w górach. Na przykład, obserwacje gwiazd i galaktyk prowadzone za pomocą teleskopów umieszczonych na górze Mauna Kea na Hawajach (4200 m n.p.m.) dostarczają zwykle dwukrotnie więcej informacji od obserwacji prowadzonych na mniejszych wysokościach. Dla niektórych astronomów ten sposób nie jest jednak dostatecznie dobry. Obecnie kilka grup naukowców pracuje intensywnie nad tzw. systemem optyki adaptacyjnej, który powinien pozwolić na prowadzenie obserwacji astronomicznych z Ziemi z dokładnością porównywalną do tej, jaką powinien osiągnąć teleskop Hubble'a nawet po uporaniu się z problemami związanymi z jego aberracją sferyczną. Optyka adaptacyjna stała sie w ostatnich latach jedną z najintensywniej rozwijanych nowinek technologicznych w astronomii. Jeśli więc wszystko się uda, to w przyszłości teleskopy naziemne w niektórych zakresach widma promieniowania elektromagnetycznego będą mogły konkurować z teleskopami kosmicznymi.

Idea optyki adaptacyjnej jest bardzo prosta. Światło gwiazdy – zanim wpadnie do teleskopu – należy odbić od elastycznego zwierciadła, które powinno być tak zdeformowane, żeby kasowało zniekształcenia światła spowodowane przez atmosferę. Pomysł jest dość stary. Prawie czterdzieści lat temu Horace W. Babcock wpadł na pomysł zastosowania systemu optycznego do „poprawiania" obrazów obiektów astronomicznych. Kłopot polega na tym, że trzeba wiedzieć najpierw, jakim zniekształceniom uległo światło przy przejściu przez atmosferę, oraz że zniekształcenia te ulegają ciągłym, bardzo szybkim zmianom. Informację taką można uzyskać monitorując zniekształcenia obrazu jasnej gwiazdy leżącej blisko interesującego nas obiektu. Pomysł Babcocka czekał jednak na techniczną realizację wiele lat. Dopiero rozwój komputeryzacji umożliwił zbudowanie systemu analizującego sygnał reprezentujący zniekształcenia spowodowane przez atmosferę i sterującego deformacją elastycznego zwierciadła w celu uzyskania „prawdziwego" obrazu naszego obiektu.

Prototyp takiego systemu, opracowanego przez Południowe Obserwatorium Europejskie (ang. *European Southern Observatory*), pozwolił niedawno uzyskać za pomocą 3,5 metrowego teleskopu w La Silla w Andach chilijskich obraz gwiazdy o wymiarach kątowych 0,18 sekundy. Jest to więc zdolność rozdzielcza klasy teleskopu Hubble'a. Wadą tego systemu jest to, że nie zawsze w pobliżu interesującego nas obiektu znajduje się dostatecznie jasna gwiazda (prototyp wymagał obecności gwiazdy o jasności co najmniej 5 mag.). Dlatego inna grupa badawcza z Honolulu pracuje nad systemem, który nie wymagałby istnienia jasnego sąsiada. Idea polega na tym, aby wykorzystać zniekształcony obraz bezpośrednio interesującego nas obiektu, tworzony przez główne zwierciadło teleskopu. Otóż, jeśli szybko zmienić ostrość tego obrazu przez przesunięcie od i do ogniska zwierciadła układu optycznego analizującego ten obraz, to pojawia się na nim układ cieni i świateł charakteryzujący zaburzenia

Jak podzielić tort?

Piotr HAJŁASZ

Dwie osoby chcą się podzielić ciastkiem. Jak powinny to zrobić, aby podział był sprawiedliwy? Pomysł jest bardzo prosty. Jeden dzieli, drugi zaś wybiera. Jest to tzw. podział pragmatyczny (nazwa pochodzi od Hugona Steinhausa).

No dobrze, ale jak to zrobić w przypadku, gdy n osób chce równo podzielić tort między siebie?

Z doświadczenia wiemy, że zwykle Pani Domu dzieli tort i rozdaje gościom, lecz jakże często czujemy się pokrzywdzeni i w duchu mówimy: „To niesprawiedliwe, on ma lepszy kawałek".

Czy można więc tak podzielić tort, aby nikt nie czuł się pokrzywdzony? Może na wadze? Nie, to niczego nie rozwiąże, bo dla kogoś jakiś kawałek, mimo że mniejszy, może przedstawiać większą wartość – jeśli jest np. z orzechem. Każdy ma swoją własną miarę wartościującą, który kawałek tortu jest lepszy, a który gorszy, i nie ma wagi, na której można by rozważyć tort na kawałki tak, aby nikt nie czuł się pokrzywdzony. Zresztą i tak nie mamy wagi.

Czy można więc wybrnąć z tej sytuacji? Można. Taki sprawiedliwy sposób podziału znaleźli Stefan Banach i Bronisław Knaster (dla $n = 3$ problem ten rozwiązał wcześniej Steinhaus). Sposób dzielenia tortu pomiędzy n osób będziemy określali indukcyjnie ze względu na liczbę osób.

Dla dwóch już potrafimy. Przypuśćmy, że wiemy, jak podzielić tort pomiędzy $n-1$ osób. Opiszemy teraz sposób podziału pomiędzy n osób.

Najpierw ponumerujmy te osoby liczbami od 1 do n. Osoba nr 1 wskazuje na torcie, jak duży kawałek chce dostać. Następnie po kolei osoby wypowiadają się, czy przypadkiem nr 1 nie chce wziąć za dużo. Jeżeli wszystkie osoby zgadzają się z 1, to bierze ona ten kawałek i pozostałe $n-1$ osób dzieli się tym, co zostało – a to już wiadomo, jak zrobić (założenie indukcyjne).

Załóżmy więc, że któraś z osób, na przykład nr 4, twierdzi, że osoba nr 1 jest zbyt zachłanna i chce wziąć za dużo. Wtedy osoba nr 4 musi wskazać mniejszy kawałek będący częścią kawałka, który wskazała osoba nr 1, a który to kawałek usatysfakcjonowałby osobę nr 4. Oczywiście, żadna z osób 1, 2, 3 nie może stwierdzić, że osoba nr 4 chce za dużo, bo przecież zgodzili się na większy kawałek. Co najwyżej któraś z osób $5, 6, \ldots, n$ może zaprotestować i wówczas ta osoba protestująca musi wskazać część kawałka, który wskazała osoba nr 4 itd.

Tak czy inaczej, po skończonej liczbie kroków znajdzie się osoba wskazująca jakiś kawałek na torcie, z którą to osobą wszystkie pozostałe będą się zgadzały, że nie jest za duży. Wtedy ta osoba bierze ten kawałek, a resztą dzieli się pozostałe $n-1$ osób (założenie indukcyjne).

Ten podział tortu pomiędzy n osób rozsądnie jest też nazwać podziałem pragmatycznym. Problemem sprawiedliwego podziału bardzo się interesował Hugo Steinhaus. W szwedzkim czasopiśmie *Econometrica* ukazał się w 1948 r. artykuł, w którym Steinhaus pisał między innymi o podziale spadku. Uważał też, że podział pragmatyczny nadaje się do rozstrzygania niektórych sporów międzynarodowych.

Powróćmy jednak do podziału tortu. Banach zauważył, że z rozwiązania tego problemu można wyprowadzić pewne ważne twierdzenie matematyczne.

Zacznijmy jednak od pewnej dygresji. Jednym z najważniejszych pojęć w matematyce jest miara. Pojęcie to jest wspólnym uogólnieniem takich pojęć, jak długość, powierzchnia, objętość. W matematyce występuje kilka modyfikacji pojęcia miary. To, co my zdefiniujemy, nosi oficjalną nazwę miary unormowanej, skończenie addytywnej, mierzącej wszystkie podzbiory zbioru X (uff!). My będziemy w skrócie mówili po prostu „miara". A oto ta definicja.

atmosferyczne. Można by więc posłużyć się nim do sterowania zwierciadłem elastycznym. Obecnie trwają prace nad budową prototypu takiego systemu. Entuzjaści sądzą, że za 2–3 lata będzie można uzyskiwać zdjęcia o „kosmicznej" jakości.

Okazało się jednak, że prace nad optyką adaptacyjną były prowadzone od lat w USA pod auspicjami Departamentu Obrony i były objęte ścisłą tajemnicą. Dopiero w maju 1991 zezwolono na opublikowanie prac na ten temat. W numerze 353(1991) czasopisma *Nature* pojawiły sie dwie prace informujące o doświadczeniach przeprowadzonych w 1983 i 1988 r. Nie warto byłoby o tym pisać, gdyby nie fakt, że zastosowano w tych doświadczeniach inną metodę pozyskiwania informacji o turbulencjach atmosfery. Metoda ta również pozwala uwolnić się od istotnie ograniczającego pole obserwacji warunku istnienia jasnej gwiazdy przewodniej w bezpośredniej bliskości badanego obiektu. W doświadczeniach C.A. Primmermana (*Nature* 353(1991), str. 141) i R.Q. Fugate (*Nature* 353(1991), str. 144) zamiast naturalnej gwiazdy przewodniej wykorzystano sztuczną. Sztuczna gwiazda przewodnia została uzyskana za pomocą światła laserowego (stąd też ingerencja Departamentu Obrony, który interesował się propagacją światła laserowego w atmosferze w kontekście „wojen gwiezdnych"). Światło lasera, wysłane przez układ optyczny teleskopu, było ogniskowane na wysokości około 5 km nad Ziemią i na skutek rozpraszania Rayleigha na atmosferycznym azocie i tlenie dawało obraz sztucznej gwiazdy. Monitorowanie tego obrazu dostarczało informacji o stanie atmosfery.

W doświadczeniu Primmermana typowy cykl obserwacji wyglądał następująco. Najpierw przez 1 ms obserwowano zniekształcony obraz naturalnej gwiazdy przy płaskim zwierciadle korekcyjnym. Nastepnie wysyłano światło lasera i na podstawie obserwacji sztucznej gwiazdy przewodniej korygowano kształt zwierciadła. Cała ta operacja trwała tylko 500 μs. Po tym obserwowano poprawiony obraz gwiazdy. Jakość uzyskanego w ten sposób obrazu gwiazdy Procyon (α CMi) była doskonała. Dla niektórych obserwacji stosunek natężenia światła w maksimum do teoretycznej wartości natężenia światła ograniczonego jedynie przez dyfrakcję wynosił 0,46, a szerokość otrzymanego obrazu była równa dyfrakcyjnej zdolności rozdzielczej teleskopu (teleskop miał 60 cm średnicy, faktyczna zdolność rozdzielcza bez systemu korekcyjnego była około 10 razy gorsza).

W doświadczeniu Fugate używano teleskopu o średnicy 1,5 m uzyskując poprawę kątowej zdolności rozdzielczej z 2″ do 0,″18. Pozwoliło to na rozdzielenie układu podwójnego 53ξ Ursae Majoris o rozmiarach kątowych 1,″3 już po jednej sekundzie obserwacji!

W innym doświadczeniu (R.A. Humphreys, *Opt. Lett.* 16 (1991)) sztuczna gwiazda przewodnia uzyskana była na wysokości 90 km w warstwie mezosferycznego sodu na skutek rezonansowego rozpraszania światła lasera. Metoda ta powinna być lepsza od przedstawionych powyżej, ale obecnie zbudowanie lasera o odpowiedniej mocy, częstości światła i długości impulsu napotyka istotne trudności techniczne.

Interesujące jest to, że systemy optyki adaptacyjnej można w zasadzie wbudować we wszystkie istniejące teleskopy. Co więcej, uzyskane wyniki dowodzą, że w niedalekiej przyszłości systemy optyki adaptacyjnej powinny umożliwić poprawę zdolności rozdzielczej największych naziemnych teleskopów na tyle, żeby mogły konkurować z teleskopami umieszczanymi poza atmosferą ziemską. Ostatnio prowadzone są też prace nad wykorzystaniem sieci neuronowych do optyki adaptacyjnej zamiast tradycyjnych technik komputerowych. Może to nie tylko uprościć algorytmy korekcyjne, ale ich zdolność uczenia się może umożliwić optymalne korygowanie zaburzeń atmosferycznych.

Czy to oznacza, że teleskop Hubble'a (i inne teleskopy kosmiczne) będzie zupełnie niepotrzebny? Niestety, nie. Optyka adaptacyjna prawdopodobnie będzie najbardziej efektywna w zakresie podczerwonym, gdzie zaburzenia atmosferyczne są stosunkowo niewielkie. W zakresie widzialnym trudno będzie jednak konkurować z teleskopem Hubble'a, a w ultrafiolecie teleskop Hubble'a będzie bezkonkurencyjny, bo atmosfera praktycznie nie przepuszcza ultrafioletu.

Pociągające zaokrąglenia

Kiedy 2 400 lat temu okazało się, że świat jest zbyt bogaty na to, by można było go opisać za pomocą stosunków dwu liczb naturalnych, w naturalny sposób postanowiono posiadany zbiór liczb wzbogacić i tak powstały liczby rzeczywiste. Konkretnie zrobił to Eudoksos przy użyciu zmyślnie wprowadzonej teorii proporcji, ale nie to jest tu ważne.

Z początku (a początek ten trwał ponad dwa tysiące lat) wszystko było w porządku. Proporcje Eudoksosa (nazywane liczbami rzeczywistymi dopiero od XIX wieku) służyły najpierw matematykom, potem fizykom, technikom, w końcu całej nauce (tej zwanej po angielsku *science*, a nie tej zwanej *art*). Służyły ofiarnie i uczciwie. Zło ujawniło się dopiero wtedy, gdy zaczęto przyglądać się im samym (zamiast ich po prostu używać). Okazało się mianowicie, że przeważająca część z nich nigdy nikomu do niczego potrzebna nie była i nie będzie.

W wyniku dowolnego pomiaru otrzymać możemy jedynie liczbę wymierną – tak już są skonstruowane nasze przyrządy. Złudzenie, że niektóre pomiary dają inne wyniki, bierze się stąd, iż jednostkę, w której mierzymy, możemy mianować liczbą niewymierną – np. stwierdzając, że jakiś kąt jest prosty możemy sądzić, iż zmierzyliśmy $\frac{\pi}{2}$, ale będzie to tylko zakamuflowany opis tego, że jest to $\frac{1}{4}$ kąta pełnego.

Nasuwa się więc pytanie, po co było wprowadzać także inne liczby (poza wymiernymi), skoro i tych jest aż nadto. Bo istotnie, wszystkich liczb wymiernych też nie potrzebujemy. Czy ktoś może rzeczywiście do czegoś rozsądnego potrzebować liczby, powiedzmy,

$$10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$$

albo czegoś jeszcze większego ? W *Kalejdoskopie matematycznym* Steinhausa można znaleźć szereg uwag na ten temat. O ile mi wiadomo, w *Księdze Guinnessa* nie ma odnotowanej największej liczby, jaka była komuś (poza matematykami) do czegoś potrzebna – nie wypada jednak wątpić, że liczba taka istnieje.

Niedwuznacznie zostało wyżej napisane, że matematycy zajmują się rzeczami niekoniecznie rozsądnymi. Nadając tej wypowiedzi sens pickwickowski spróbujmy jednak odpowiedzieć na pytanie, dlaczego matematycy natworzyli tyle liczb, dla których realne odpowiedniki *de facto* nie istnieją. Odpowiedź, że musieli, jest tylko odwlekaniem odpowiedzi – co ich, mianowicie, do tego zmuszało ?

Faktyczna odpowiedź tkwi już u samego źródła. Kiedy stwierdzono, że przekątna kwadratu nie jest wymierną wielokrotnością jego boku, do wyboru były trzy możliwości: albo uznać, że nie należy ich porównywać (na co żaden uczony nigdy przystać nie powinien), albo uznać, że nie zawsze prawdziwe jest twierdzenie Pitagorasa (czyli że zachodzi tylko dla trójkątów, których długości boków są wymiernymi wielokrotnościami tzw. trójek pitagorejskich), albo wreszcie dopuścić istnienie liczby $\sqrt{2}$. To ostatnie rozwiązanie dawało przyjemną okrągłość teorii i na nie się zdecydowano. Tyle że kontynuując dbałość o kształt teorii trzeba się było zdecydować i na inne liczby niewymierne. Trzeba więc było stworzyć elegancką teorię wszelkich liczb – idea istnienia kresu zbioru ograniczonego spełniała wszelkie wymogi pod tym względem (czy też równoważna teoria przekrojów). W konsekwencji otrzymano (właśnie dla owej ogólności i elegancji)

Niech dany będzie zbiór X. Miara m (unormowana... itd.) jest to funkcja, która przyporządkowuje każdemu podzbiorowi zbioru X pewną liczbę nieujemną w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:
1) $m(\emptyset) = 0, \quad m(X) = 1.$
2) *Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są rozłącznymi podzbiorami zbioru X, to*
$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \\ = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_n).$$

Może wyjaśnimy tę bardzo długą nazwę: miara unormowana... Otóż, słowo unormowana oznacza, że $m(X) = 1$. Warunek 2) nazywa się skończoną addytywnością. Wprowadza się też w matematyce miary, które nie muszą spełniać warunku $m(X) = 1$. Wówczas nie nazywa się ich unormowanymi. W warunku zaś 2) często sumy skończone zastępuje się sumami nieskończonymi i wówczas mówi się, że miara jest przeliczalnie addytywna. Wreszcie, na ogół nie zakłada się, że miara mierzy wszystkie podzbiory, to znaczy zakłada się, że funkcja m jest określona tylko dla niektórych podzbiorów zbioru X.

W dalszym jednak ciągu mówiąc o mierze będziemy mieli na myśli miarę unormowaną, skończenie addytywną, mierzącą wszystkie podzbiory zbioru X (por. mój artykuł w *Delcie* 11/1991). No dobrze, ale co to ma wspólnego z dzieleniem tortu?

Otóż, dla każdej osoby dany kawałek tortu przedstawia jakąś wartość. Umawiamy się, że cały tort dla każdej osoby ma wartość 1. (Można się, na przykład, umówić, że owa wartość to ilość pieniędzy, które ta osoba zapłaciłaby, aby dostać dany kawałek tortu, przy czym waluta jest tak dobrana, że za cały tort ta osoba chciałaby zapłacić 1.)

A więc takie przypisywanie wartości różnym kawałkom tortu to nic innego tylko miara!

Oczywiście, ponieważ różne osoby mają różne preferencje – jeden woli nawet dostać mniejszy kawałek, byle z rodzynkiem – więc dla różnych osób dany kawałek tortu ma inną wartość. Czyli, innymi słowy, mamy n miar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ opisujących gusty osób czekających na tort.

Miary te mają jeszcze jedną własność. Mianowicie, jeśli kawałek K przedstawia dla i-tej osoby wartość $m_i(K) > 0$, to może ona z tego kawałka odciąć mniejszy $K' \subseteq K$, taki że $m_i(K')$ jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od $m_i(K)$. Czyli, innymi słowy, i-ta osoba może z kawałka K odciąć część K' o upatrzonej z góry wartości. Własność tę nazywa się nieograniczoną podzielnością. A więc, jak zauważył Banach, tłumacząc na język teorii miary powyższą procedurę dzielenia tortu otrzymujemy natychmiast dowód następującego twierdzenia.

Jeśli $m_1, m_2, \ldots, m_n$ są miarami nieograniczenie podzielnymi, unormowanymi, skończenie addytywnymi, mierzącymi wszystkie podzbiory zbioru X, to tak możemy rozbić zbiór X na zbiory rozłączne $K_1, K_2, \ldots, K_n$, że

$$m_1(K_1) \geq \frac{1}{n}, \quad m_2(K_2) \geq \frac{1}{n}, \ldots \quad \ldots, \quad m_n(K_n) \geq \frac{1}{n}.$$

Zauważmy, że warunek $m_i(K_i) \geq \frac{1}{n}$ oznacza, że w subiektywnym odczuciu i-tej osoby dostała ona nie mniej niż $1/n$-tą część tortu.

Jak już zauważyliśmy, dowód tego twierdzenia jest dokładnym powtórzeniem procedury podziału pragmatycznego.

Powiedzieliśmy, że istnieje wiele modyfikacji pojęcia miary. Banach zresztą sformułował swoje twierdzenie dla inaczej zdefiniowanej miary. Twierdzenie Banacha doczekało się uogólnienia. W 1940 r. radziecki matematyk Liapunow udowodnił bardzo abstrakcyjne twierdzenie o tzw. miarach wektorowych, z którego to twierdzenia wynika w szczególności twierdzenie Banacha. Ciekawe, czy Liapunow wiedział coś o podziale pragmatycznym tortu?

teorię, w której istotnie używane liczby (z powodu których teorię tworzono) stanowią zaniedbywalny margines. Nawet te liczby, od których ulepszanie się zaczęło – pierwiastki z liczb naturalnych czy wymiernych – też okazują się marginesowe. Nawet jeśli za przyzwoitsze liczby uznamy te, które są pierwiastkami dowolnych wielomianów o współczynnikach wymiernych (liczby algebraiczne), to i tak tych innych (przestępnych) będzie nieskończenie wiele razy więcej.

Pierwsze liczby przestępne odkrył Liouville w 1844 roku. Były to liczby postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie c_i to dowolne z liczb naturalnych spełniających warunek $1 \leq c_i \leq 9$. To, że liczb przestępnych jest tak wiele, uświadomił matematykom trzydzieści lat później Cantor.

Jest cały szereg fajnych twierdzeń o liczbach należących do nieużywanej większości – większość z tych twierdzeń mówi o ich ekspansjonistycznym charakterze, np.:
jeśli α i β są liczbami algebraicznymi ($\alpha \neq 0$, 1) i β jest niewymierna, to α^β jest liczbą przestępną.
Ale faktycznie wskazują one, że w pogoni za ładnie ogólnymi teoriami matematycy zapędzili się daleko poza świat (cóż tu ukrywać) normalnych ludzi.

Zjawisko opisane tu na przykładzie liczb jest w matematyce zjawiskiem typowym. Podobnie, goniąc za odpowiednio zaokrągloną teorią funkcji wyprodukowano dla niej definicję tak ogólną, że dziś mamy funkcje ciągłe nigdzie nie różniczkowalne, wszędzie różniczkowalne i równocześnie w żadnym przedziale nie monotoniczne itd., itp. Właściwie w każdej gałęzi matematyki spotykamy podobne sytuacje. Ta część matematyki, która powstała z zewnętrznej (w stosunku do matematyki) potrzeby, jest w każdej z jej gałęzi znikomo mała. Stanisław Lem ustami bohaterów *Księgi robotów* twierdzi, że aby pokonać smoka, trzeba stworzyć ogólną teorię smoków, w której ten smok, o którego chodzi, będzie szczególnym, łatwym do rozwiązania przypadkiem. Rzeczywiście, często tak jest łatwiej. Matematycy poszli jednak dalej – ogólną teorię smoków gotowi są tak rozbudować, że same smoki staną się mało zauważalnym obiektem zainteresowania powstałej teorii, ale za to teoria nabierze pociągających, opływowych, wręcz zmysłowo na jej twórców oddziałujących kształtów.

Ale, Szanowni Niematematycy, przyznajcie: czyż nie jest to sytuacja (jak powiedział marszałek Radetzky na polu bitwy pod Custozzą) godna zawiści ?

Marek KORDOS

Żył kiedyś człowiek,
który uczył się, jak zabijać smoki
i oddał wszystko, co miał,
aby opanować tę sztukę.

Po trzech latach
osiągnął mistrzostwo.
Nigdy jednak nie miał okazji
wykorzystać swoich umiejętności.

Dschuang Dsi

I wtedy zaczął uczyć innych,
jak zabijać smoki.

René Thom

Powyższy wiersz wraz z pointą (wybitnego matematyka, laureata Medalu Fieldsa) stanowi motto książki matematycznej Th. Bröcker & L. Lander *Differentiable Germs and Catastrophes.*