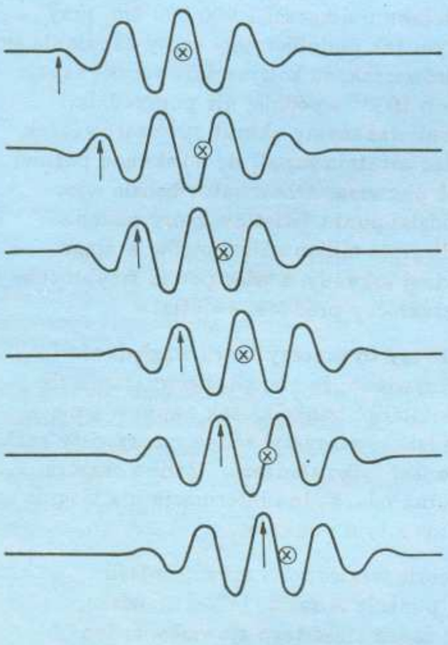
tych sposobów pozornymi, uznając w ten sposób, że przez przekroczenie prędkości światła rozumie się to, co ten termin oznacza w teorii względności.

Przeanalizujmy teraz powyższe cztery sposoby – od ostatniego do pierwszego – aby się przekonać, że rzeczywiście nie prowadzą one do sprzeczności z teorią względności.

Ostatni sposób już przeanalizowaliśmy. Przykład poprzedni (ten z laserem) jest dokładnie tej samej natury, co przykład z żaróweczkami. Jedynie tylko to, że doświadczenie jest trochę bardziej skomplikowane, może wywołać wrażenie, że przykład ten jest bardziej subtelny.

Przejdźmy teraz do omówienia przykładu z falą elektromagnetyczną. Zastanówmy się, czy to, że prędkość fazowa fali jest większa niż c, rzeczywiście oznacza, że fala porusza się z prędkością większą niż c, to znaczy, czy fala ta przenosi informację, energię... z prędkością większą niż c?

Poniższy rysunek pokazuje, że rzeczywista prędkość „paczki falowej" może być mniejsza od prędkości fazowej.



Prędkość fazowa (prędkość strzałki) może być znacznie większa od prędkości całej paczki falowej (prędkość krzyżyka).

Otóż, cała informacja, energia... porusza się z paczką falową, a więc prawdziwa prędkość, z jaką porusza się fala, to prędkość całej paczki falowej, a ta jest już zawsze nie większa niż c. Prędkość ta nazywa się prędkością grupową.

Pozostał teraz już tylko jeden paradoks do wytłumaczenia – ten z galaktyką.

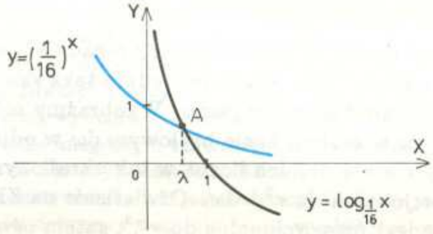
Spróbuj wykryć błędy

Robert HAJŁASZ

1. ***Ile rozwiązań ma równanie***

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x\,?$$

Rozwiązanie.



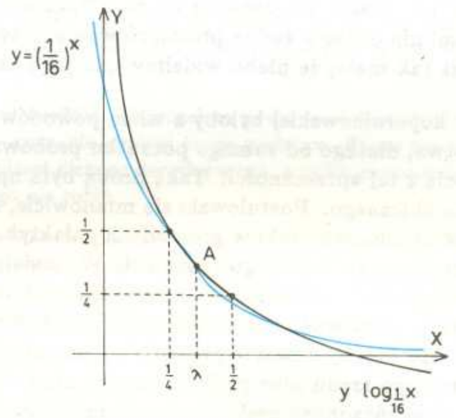
Odpowiedź: Dokładnie jedno.

Tymczasem

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4}, \quad \text{zatem } x_1 = \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}, \quad \text{zatem } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Można dowieść, że dane równanie ma dokładnie trzy rozwiązania: $\frac{1}{4}, \lambda, \frac{1}{2}$. Błędny był wykres. Powinien on wyglądać tak:



2. ***Dla jakiej wartości parametru a układ równań***

$$\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ y^2 + x^2 = a \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Rozwiązanie.

I sposób

Przypuśćmy, że dla pewnej wartości a układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y). Wtedy otrzymujemy następujące zdania prawdziwe

$$y^2 + y = 3 + a\,,$$

$$y^2 + y - (3 + a) = 0\,.$$

Skoro jest tylko jedno (x, y), więc jest tylko jedno y. A jeżeli tak, to musi być $\Delta = 0$, czyli

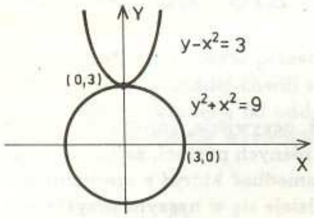
$$1 + 4(3 + a) = 0\,,$$

$$a = -\frac{13}{4}\,.$$

Zatem wykazaliśmy, że jeśli istnieje a, przy którym układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to $a = -13/4$. Innymi słowy, wykazaliśmy, że $a = -13/4$ to jedyny kandydat na wartość parametru a, przy którym układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Czy kandydat „przejdzie", przekonujemy się przez sprawdzenie. Podstawiając $a = -13/4$ do równania $y^2 + x^2 = a$ dostajemy sprzeczność.

Odpowiedź: Dla żadnej.

II sposób



Odpowiedź: Dla $a = 9$. Wtedy jedynym rozwiązaniem jest para $(0, 3)$.

I sposób jest błędny, II sposób jest poprawny. Błąd w sposobie I pojawił się, gdy uznaliśmy, że przy dokładnie jednym rozwiązaniu układu musi być $\Delta = 0$. Otóż, nie musi. Istotnie, popatrzmy bowiem na rysunek. Widać, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie $(0, 3)$, natomiast $\Delta \neq 0$. No bo obliczmy Δ.

$$y^2 + y - 12 = 0,$$
$$\Delta = 49.$$

Wtedy $y_1 = -4$, $y_2 = 3$, ale y_1 zostaje przez równanie $y - x^2 = 3$ odrzucone i zostaje tylko y_2.

3. *Wiedząc, że* $a^2 + a + 1 = 0$, *oblicz* $a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}}$.

Rozwiązanie.
Mnożąc obie strony danej równości przez a mamy $a^3 + a^2 + a = 0$, stąd $a^3 = -\underbrace{(a^2 + a)}_{-1} = +1$.

I sposób

$$a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}} = (a^3)^{663}a^2 + \frac{1}{(a^3)^{663}a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} =$$
$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 - 2 = \left(\frac{-a}{a}\right)^2 - 2 = -1.$$

Odpowiedź: -1.

II sposób

$$a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}} = (a^3)^{\frac{1991}{3}} + \frac{1}{(a^3)^{\frac{1991}{3}}} = 1 + 1 = 2.$$

Odpowiedź: 2.

Gdy „rzecz dzieje się w zbiorze liczb rzeczywistych", wtedy oba sposoby są złe. Nie ma bowiem takiego rzeczywistego a, że $a^2 + a + 1 = 0$. Gdy „rzecz dzieje się w zbiorze liczb zespolonych", wtedy I sposób jest poprawny, II sposób zaś jest zły. Zły dlatego, że wzór $(z^k)^l = z^{kl}$ obowiązuje, przy zespolonym z, dla k, l całkowitych. Weźmy np. $k = 4$, $l = 1/4$. Wtedy wzór się „psuje". Istotnie

$$\underbrace{(i^4)^{\frac{1}{4}}}_{\underbrace{(iiii)^{\frac{1}{4}}}_{1}} = \underbrace{i^{4 \cdot \frac{1}{4}}}_{i}.$$

Zatem $1 = i$. Sprzeczność.

4. *Oblicz* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

Rozwiązanie.
I sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

II sposób

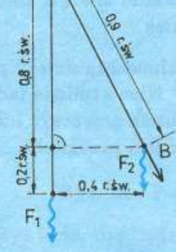
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

I sposób jest błędny. II sposób jest poprawny. W sposobie I zastosowaliśmy twierdzenie o granicy sumy. Twierdzenie to wolno stosować tylko wtedy, gdy składniki tej sumy są zbieżne i liczba tych składników jest stała. Tymczasem u nas liczba ta rośnie wraz z n.

Paradoks ten jest nieco innego rodzaju niż trzy pozostałe. Mianowicie, nie mamy tutaj do czynienia z żadnym przekroczeniem prędkości światła. To, że wydaje się nam, iż jakiś obłok porusza się z prędkością większą niż c, jest po prostu złą interpretacją danych doświadczalnych. Nie, nie twierdzę, że to wynika z niedokładności pomiarów. To jest coś znacznie bardziej subtelnego.

Oczywiście, nikt nie wie, jak to jest naprawdę. Istnieje jednak hipoteza bardzo ładnie tłumacząca obserwowanie takich prędkości. Wyobraźmy sobie, że obserwowany obłok porusza się z prędkością 0,9 c pod kątem 26,°6 do prostej łączącej nas z obłokiem.

Niech w chwili $t = 0$ obłok znajduje się w punkcie A. Wysyła on wówczas z tego punktu foton F_1 w naszą stronę. W chwili $t = 1$ rok obłok znajduje się w punkcie B. Wysyła on wówczas z tego punktu foton F_2 w naszą stronę.



Otóż, z rysunku widać, że foton F_1 wyprzedza w „pionie" foton F_2 o 0,2 roku świetlnego, podczas gdy różnica ich współrzędnych w poziomie wynosi 0,4 roku świetlnego.

Po upływie milionów lat, gdy fotony dotrą na Ziemię, najpierw dotrze foton F_1, a po upływie 0,2 roku dotrze foton F_2. Natomiast my będziemy obserwowali, że dotarły one z punktów w przestrzeni odległych o 0,4 roku świetlnego. Stąd otrzymamy prędkość poprzeczną 2c, podczas gdy tak naprawdę jest ona równa „zaledwie" 0,4 c.