Paradoksy w rachunku prawdopodobieństwa

Jacek JAKUBOWSKI

Rachunek prawdopodobieństwa jest tą dziedziną matematyki, w której istnieje szczególnie dużo paradoksów. Związane jest to z naszymi błędnymi wyobrażeniami o losowości. Znany jest fakt, że dla niewprawnej osoby losowość wydaje się regularnością lub tendencją do skupiania się. W tym artykule przedstawię kilka znanych i ciekawych paradoksów. Jednocześnie mam nadzieję, że ich zrozumienie przybliży rachunek prawdopodobieństwa.

Problem kawalera de'Mere

Przy rzucie trzema kostkami sumę oczek równą 11 można otrzymać sześcioma sposobami:

$$1+4+6=1+5+5=2+4+5=2+3+6=3+4+4=3+3+5.$$

Sumę oczek równą 12 też można otrzymać sześcioma sposobami:

$$1+5+6=2+5+5=2+4+6=3+3+6=3+4+5=4+4+4.$$

Dlaczego częściej wypada suma oczek równa 11 niż suma oczek równa 12? Wydaje się, że jest to sprzeczność. Nasz „zdrowy rozsądek" mówi, że rzucając jednakowymi kostkami należy je traktować jak kostki nierozróżnialne, a zatem obu zdarzeniom sprzyja 6 sytuacji, czyli oba zdarzenia mają jednakowe prawdopodobieństwo równe 6/56. Okazuje się, że natura wybiera inny model, a mianowicie traktuje kostki jak kostki rozróżnialne (czyli tak, jak gdyby kostki były pomalowane różnymi kolorami). Wtedy ważne jest nie tylko, jakie wypadły oczka, ale i na których kostkach. Zajściu zdarzenia polegającego na otrzymaniu sumy oczek równej 11 sprzyja 27 wyników, a zdarzeniu polegającemu na otrzymaniu sumy oczek równej 12 sprzyja 25 wyników. Różnica między prawdopodobieństwami jest tak mała (około 0,009), że można na nią zwrócić uwagę tylko wtedy, gdy wykona się dużą liczbę rzutów.

Paradoks Bertranda

„twierdzi", że prawdopodobieństwo nie jest wyznaczone jednoznacznie. Rozwiążmy następujące zadanie:

W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt równoboczny. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo poprowadzona cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta.

Rozwiązanie pierwsze. Patrzymy na kąt środkowy oparty na losowo wybranej cięciwie. Zatem zdarzeniem elementarnym jest wybór kąta środkowego, czyli przestrzenią zdarzeń elementarnych jest odcinek $[0,\pi]$. Cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta, gdy kąt środkowy jest większy niż $2\pi/3$, stąd zbiór zdarzeń sprzyjających A jest odcinkiem $(2\pi/3,\pi]$. $P(A)$ jest równe długości przedziału $(2\pi/3,\pi]$ podzielonej przez długość przedziału $[0,\pi]$, tzn. $P(A)=1/3$.

Rozwiązanie drugie. Patrzymy na odległość środka cięciwy od środka okręgu. Utożsamiamy cięciwy, których środek leży na tym samym okręgu (mają one tę samą długość). Zdarzeniem elementarnym jest wybór odległości środka cięciwy od środka okręgu. Zatem przestrzenią zdarzeń elementarnych jest odcinek $[0,R]$. Cięciwa spełnia warunki zadania, gdy odległość środka cięciwy od środka okręgu jest mniejsza od $R/2$, tzn. zbiór zdarzeń sprzyjających B jest odcinkiem $[0,R/2)$. Stąd $P(B)=1/2$.

Rozwiązanie trzecie. Położenie cięciwy jest wyznaczone przez położenie jej środka, zatem długość cięciwy jest wyznaczona jednoznacznie przez położenie jej środka. Zdarzeniem elementarnym jest wybór środka cięciwy, to znaczy wybór jednego punktu z koła. Stąd przestrzenią zdarzeń elementarnych jest koło o promieniu R. Zbiór zdarzeń sprzyjających C jest wnętrzem koła o promieniu $R/2$. Stąd $P(C)=\dfrac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2}=\dfrac{1}{4}$.

Otrzymaliśmy trzy różne wyniki. Dopóki nie było aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa (a została ona sformułowana dopiero w 1933 r. przez Kołmogorowa), nie można było tej sprzeczności wyjaśnić. Teraz możemy. W każdym z proponowanych rozwiązań co innego rozumieliśmy przez słowa „losowo poprowadzona". Wybierając metodę rozwiązywania zadania wybieramy przestrzeń probabilistyczną (sposób losowania). Wybierając inną przestrzeń probabilistyczną rozwiązujemy inne zadanie. Paradoks Bertranda jest bardzo dobrą ilustracją faktu, że rozwiązanie problemu następuje dopiero po wybraniu przestrzeni probabilistycznej. Rachunek prawdopodobieństwa nie rozstrzyga problemu, jaką przestrzeń probabilistyczną należy wybrać.

Rozwiązanie zadania F 881.
Niech R oznacza promień Ziemi, $S=4\pi R^2$ jej powierzchnię. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni Ziemi wynosi $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}$. W kierunku Ziemi płynie prąd $I=\dfrac{E}{\rho}\cdot S=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\rho}$. Rozładowaniu Ziemi zapobiegają burze, które dostarczają na jej powierzchnię ładunek ujemny. Prąd piorunów musi się równać prądowi ładunków dodatnich: $q\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=I$, gdzie N oznacza liczbę piorunów. Stąd $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\rho q}=110$ piorunów/s.

Rozwiązanie zadania F 882.
Momenty magnetyczne ferromagnetyków związane są z własnymi momentami magnetycznymi elektronów, które ustawione są w preferowanym kierunku, tj. do góry. Własne momenty pędu elektronów (spiny) ustawione są w przeciwnym kierunku, tj. w dół. Po przekroczeniu temperatury Curie zanika stan ferromagnetyzmu i ustawienie momentów, a zatem i spinów, będzie chaotyczne. Wypadkowy moment pędu musi być jednak zachowany – stąd wynika, że magnes jako całość zacznie się obracać. Prędkość kątowa $\vec{\omega}$ będzie skierowana w dół.

Rozwiązanie zadania M 629.
Nie istnieje. Przypuśćmy bowiem, że istnieje. Weźmy dwie ściany mające wspólną krawędź. Narysujmy na nich po jednej prostej równoległej do owej krawędzi, a następnie przetnijmy wielościan płaszczyzną przechodzącą przez te proste. W przekroju otrzymamy wielokąt o dwóch bokach równoległych. Nie będzie to więc trójkąt.

Rozwiązanie zadania M 630.
Nie może. Przypuśćmy bowiem, że A jest kwadratem jakiejś liczby naturalnej. Wówczas ostatnią cyfrą liczby A musi być 1, 4 lub 9, bo nie ma kwadratów kończących się na 05 ani 06. Oznaczmy ostatnią cyfrę przez n^2. Mamy

$$A-n^2=(\sqrt{A}-n)(\sqrt{A}+n).$$

Otóż $A-n^2$ jest podzielne przez 5^{k-1}, gdzie $k\geq 3$ oznacza liczbę cyfr w rozwinięciu A, ale tylko jedna z liczb $\sqrt{A}-n$, $\sqrt{A}+n$ jest podzielna przez 5, więc stąd wynika, że jest ona podzielna przez 5^{k-1}. Mamy

$$\sqrt{A}+n\geq 5^{k-1},\quad A\geq(5^{k-1}-3)^2.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że A nie może mieć trzech cyfr. Dla $k\geq 4$ mamy zaś $A\geq(5^{k-1}-3)^2>9\cdot 10^{k-1}+9$. Sprzeczność.

Dylemat więźnia

Trzech więźniów A, B, C przebywało w więzieniu. Administracja postanowiła uwolnić jednego, o czym dowiedzieli się więźniowie, ale nie wiedzieli którego. Więzień A ma wśród strażników znajomego, który wie, kto będzie wolny. Chce go zapytać, ale krępuje się pytać o siebie. Pyta więc o imię jednego z więźniów (B lub C), który ma pozostać w więzieniu. Przed zadaniem pytania ocenia, że każdy z nich ma szansę wyjścia równą $1/3$. Myśli, że jeśli strażnik powie, że na przykład B zostaje, to jego szanse rosną do $1/2$ (bo zostanie uwolniony A lub C). Gdzie popełnia błąd?

Źle liczy zdarzenia elementarne. Nie bierze pod uwagę wariantów odpowiedzi strażnika. Strażnik powie B z prawdopodobieństwem 1, gdy zostają A i B, a z prawdopodobieństwem $1/2$, gdy zostają B i C. Zatem prawdopodobieństwo warunkowe, że wyjdzie A, gdy zna odpowiedź strażnika, jest równe

$$\frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 0 + 1 \cdot 1/3} = \frac{1}{3},$$

a nie $1/2$, jak sądził A (skorzystaliśmy z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite). Tego należało się spodziewać, gdyż informacja strażnika z punktu widzenia A nic nie wnosi. Wiadomo, że co najmniej jeden z więźniów B i C zostaje.

Paradoks długości gry

Gra składa się z ciągu $2n$ partii, z których w każdej gracz A wygrywa jeden punkt z prawdopodobieństwem $p = 0,45$, a gracz B wygrywa jeden punkt z prawdopodobieństwem $1-p$. Dla wygrania całej gry należy uzyskać więcej punktów. Jeśli gracz A może wybrać liczbę partii $2n$ z góry, to jakie n powinien wybrać? Wielu osobom wydaje się, że skoro gra jest niekorzystna dla A, to im szybciej się skończy, tym lepiej dla A. Gdyby liczba partii była dowolną liczbą naturalną, to tak by było i A powinien wybrać grę o długości 1. Ale A może wybierać tylko spośród liczb parzystych i wtedy na wynik ma wpływ to, że gra jest korzystna dla B i to, że prawdopodobieństwo remisu maleje wraz ze wzrostem n. Jeśli $p = 0,45$, to optymalną długością gry nie jest 2, ale jest 10. Można to obliczyć korzystając z tego, że prawdopodobieństwo wygrania gracza A w ciągu $2n$ partii wynosi $\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k}$ i z tego, że jeśli A w grze o długości $2n$ nie zdobył n albo $n+1$ punktów, to w grze o długości $2n+2$ wygra lub przegra w zależności od tego, czy wygrał, czy przegrał w grze o długości $2n$. Dla $0 < p < 1/2$ długość gry $2n$ spełnia warunek $\frac{1}{1-2p} - 1 \le 2n \le \frac{1}{1-2p} + 1$.

Paradoks losowych liczb naturalnych

Dwóch graczy A i B gra w następującą grę. Automat generuje losowo pary sąsiednich liczb naturalnych i przyznaje losowo jedną graczowi A, a drugą graczowi B. Gracz A zna liczbę przypisaną graczowi B, a gracz B zna liczbę przypisaną graczowi A. Żaden z nich nie zna swojej liczby. Osoba z mniejszą liczbą płaci drugiej tyle żetonów, ile wynosi liczba jej przypisana. Każdy z graczy może uznać, że nie warto grać w danym momencie i poprosić o nową parę liczb. Ale żaden z nich nie spasuje, gdyż rozumuje: Gdy widzę, że przeciwnik ma liczbę k, to ja mam $k-1$ lub $k+1$. Każda z nich jest jednakowo prawdopodobna (poza $k=1$), ale gdy wygram, to dostanę $k+1$ żetonów, a gdy przegram, tracę tylko $k-1$ żetonów. Średnio każdy z nich wygrywa, więc gra jest korzystna dla obu. Jest to niemożliwe. Gdzie jest błąd?

Paradoks wynika z faktu, że nie istnieje rozkład prawdopodobieństwa, który przypisuje każdej liczbie naturalnej tę samą wartość (dlaczego?). Natomiast gdyby ograniczyć zbiór liczb, z którego maszyna losuje, byłby to zbiór skończony i rozumowanie graczy prowadzące do paradoksu byłoby fałszywe.

Mam nadzieję, że te paradoksy przybliżyły rachunek prawdopodobieństwa Czytelnikowi i pokazały, jak często nasza intuicja może być zawodna.

Rozwiązanie zadania M 628. Oto dowód: $\sum_{i=2}^{n^k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n^{i-1}+1} + \ldots + \frac{1}{n^i} \right)$, ale

$$\frac{1}{n^{i-1}+1} + \ldots + \frac{1}{n^i} = \sum_{m=2}^{n} \left(\frac{1}{(m-1)n^{i-1}+1} + \ldots + \frac{1}{mn^{i-1}} \right) \ge \sum_{m=2}^{n} \frac{n^{i-1}}{mn^{i-1}} = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} \text{ i stąd } \sum_{i=2}^{n^k} \frac{1}{i} \ge \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} = k \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m}.$$