Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 219 (WT=3,52) i 220 (WT=1,67) z numeru 4/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	42,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 239, 240

Redaguje Marcin E. KUCZMA

239. Dla danej liczby naturalnej $n \ge 3$ wyznaczyć kres dolny i kres górny wartości wyrażenia
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$
po wszystkich układach liczb dodatnich $(a_1, \ldots, a_n)$; przyjmujemy, że numeracja jest cykliczna $(a_{n+1} := a_1, a_{n+2} := a_2)$.

240. Znaleźć wszystkie pary (x,y) spełniające równanie
$$5y^2 - 2x^2 + 4xy - 23x - 27y + 12 = 0,$$
w których x jest dowolną liczbą całkowitą, a y – liczbą pierwszą.

Zadanie 240 zaproponował pan Marcin Wyciślik z Chorzowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1991

Przypominamy treść zadań:

231. Dowieść, że miary kątów α, β, γ trójkąta ostrokątnego spełniają nierówność
$$\sqrt{3}\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \ge 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 .$$

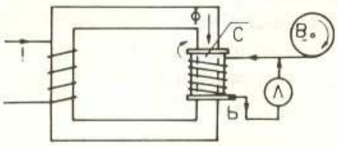
232. „Zwinąć” sumy $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2j}\binom{n-2j}{2k-2j}$ i $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{2j+1}\binom{n-2j-1}{2k-2j-1}$ (dla danych $n, k \in \mathbf{N}$, $n \ge 2k$).

231. Przyjmijmy, że $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Oznaczmy: $\varphi = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\psi = \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Wówczas
$$\tfrac{1}{4}\pi \le \varphi \le \tfrac{1}{3}\pi, \quad \varphi \ge \psi \ge 0, \tag{1}$$
$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) =$$
$$= (2\cos\varphi\cos\psi - \cos 2\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left(2\sin\varphi(\cos\varphi + \cos\psi)\right) = \tag{2}$$
$$= ax^2 - bx + c,$$
gdzie
$$a = 4\cos^2\varphi, \qquad b = 4\cos\varphi\cos 2\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi,$$
$$c = \cos^2 2\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad x = \cos\psi.$$
Dla ustalonych wartości a, b, c trójmian kwadratowy $T(x) = ax^2 - bx + c$ jest funkcją rosnącą zmiennej x w przedziale $\langle x_0; \infty)$, gdzie
$$x_0 = \frac{b}{2a} < \frac{4\cos\varphi\cos 2\varphi + 2}{8\cos^2\varphi} = \cos\varphi + \frac{1 - 2\cos\varphi}{4\cos^2\varphi} \le \cos\varphi .$$
Teza zadania mówi, że wyrażenie (2) przyjmuje wartości niedodatnie. Ponieważ $x = \cos\psi \in \langle\cos\varphi; 1\rangle \subset \langle x_0; \infty)$, wystarczy wykazać, że $T(1) \le 0$, czyli że
$$a - b + c = (2\cos\varphi - \cos 2\varphi)^2 - \sqrt{3}\sin\varphi(1 + \cos\varphi) \le 0. \tag{3}$$
Wprowadzamy zmienną $t = 2\cos\varphi - 1$. Wówczas $\cos\varphi = \frac{1}{2}(1+t)$, $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{1}{2}(t^2 + 2t - 1)$, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - 2t - t^2}$ i dowodzona nierówność (3) przybiera po krótkich przekształceniach postać
$$\frac{(3-t^2)^2}{3+t} \le \sqrt{9 - 6t - 3t^2}.$$
Prawdziwość tej nierówności można udowodnić porównując jej lewą i prawą stronę z wyrażeniem $3 - t - t^2$:
$$\frac{(3-t^2)^2}{3+t} \le 3 - t - t^2 \le \sqrt{9 - 6t - 3t^2}. \tag{4}$$
Pierwsza z nierówności (4) sprowadza się łatwo do postaci $t^2 + t - 2 \le 0$, a druga — do $t^2 + 2t - 2 \le 0$. Wobec oszacowań (1) zmienna t przebiega przedział $\langle 0; \sqrt{2} - 1\rangle$, w którym obie te nierówności są spełnione. To kończy dowód.

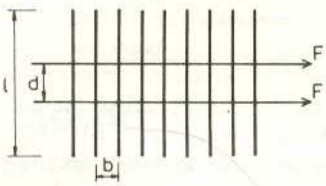
232. Oznaczmy pierwszą z podanych sum przez $F(n,k)$, a drugą — przez $G(n,k)$. Mamy równość
$$\binom{n}{2j}\binom{n-2j}{2k-2j} = \frac{n!}{(2j)!(n-2j)!} \cdot \frac{(n-2j)!}{(2k-2j)!(n-2k)!} =$$
$$= \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{(2j)!(2k-2j)!} = \binom{n}{2k}\binom{2k}{2j}.$$
Podobnie sprawdzamy, że
$$\binom{n}{2j+1}\binom{n-2j-1}{2k-2j-1} = \binom{n}{2k}\binom{2k}{2j+1}.$$
Zatem
$$F(n,k) = \binom{n}{2k} f(n,k), \qquad G(n,k) = \binom{n}{2k} g(n,k),$$
gdzie
$$f(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j}, \qquad g(n,k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j+1}.$$
Zauważmy, że
$$f(n,k) + g(n,k) = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} = (1+1)^{2k} = 2^{2k},$$
$$f(n,k) - g(n,k) = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i}(-1)^i = (1-1)^{2k} = 0.$$
Stąd $f(n,k) = g(n,k) = 2^{2k-1}$ i ostatecznie
$$F(n,k) = G(n,k) = 2^{2k-1}\binom{n}{2k}.$$

Zadania z fizyki nr 137, 138

Redaguje Jerzy B. BROJAN



137. Przez wnętrze cewki C przechodzi stały strumień Φ pola magnetycznego wytworzonego przez magnes stały lub – jak na rysunku – elektromagnes. Cewka obraca się ze stałą prędkością kątową ω, nawijając drut z bębna B (i zwiększając w ten sposób liczbę zwojów). Woltomierz V jest dołączony jedną końcówką ślizgową do pierścienia P, a drugą do drutu. Obliczyć wskazania woltomierza.



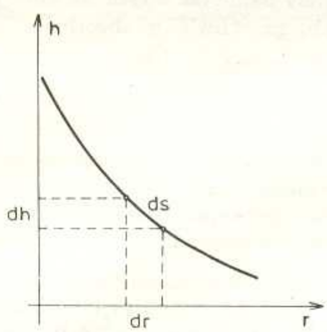
138. Dwie równoległe nici odległe o d są napięte, każda siłą F. Do nici są prostopadle przymocowane jednorodne pręty w odległości wzajemnej b, każdy o masie m i długości l (rys.). Środki prętów są w połowie odległości między nićmi. Obliczyć prędkość fali torsyjnej wzdłuż nici (fala ta polega na obrocie kolejnych prętów w płaszczyźnie prostopadłej do nici). Założyć, że kąty obrotu sąsiednich prętów niewiele się różnią.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1991

Przypominamy treść zadań:

129. Cienki jednorodny łańcuszek o masie m i długości l został zamocowany za jeden z końców w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Nadajemy mu prędkość kątową ω wokół pionowej osi przechodzącej przez punkt zawieszenia, tak że w obracającym się układzie odniesienia łańcuszek osiąga stan równowagi. Jaka jest minimalna wartość prędkości kątowej, przy której możliwy jest stan równowagi różny od zwisu pionowego? Wykazać, że ta minimalna prędkość kątowa jest proporcjonalna do $\sqrt{g/l}$ i obliczyć numerycznie stałą proporcjonalności.

130. W dwóch jednakowych naczyniach znajduje się ta sama ilość tego samego gazu o tej samej temperaturze początkowej; na zewnątrz naczyń jest próżnia. Otwarto mały otworek w każdym naczyniu, tak że gaz zaczął wypływać. Otworki różnią się wielkością: w pierwszym naczyniu otwór ma średnicę mniejszą od średniej drogi swobodnej cząsteczek, a w drugim ma średnicę znacznie większą od średniej drogi swobodnej. Przez oba otworki wypuszczono jednakową ilość gazu (w ciągu niejednakowego czasu). W którym naczyniu gaz oziębił się silniej? Dopływ ciepła z naczynia i z otoczenia pominąć.



129. Zbadajmy kształt łańcuszka i zmienność siły napięcia wzdłuż niego, gdy znajduje się on w stanie równowagi w obracającym się układzie odniesienia (rysunek). Przy przesunięciu o ds wzdłuż łańcuszka w górę pionowa składowa F_h siły napięcia przyrasta o

(1) $$dF_h = dm \cdot g = \rho g ds\,,$$

gdzie $\rho = \dfrac{m}{l}$. Składowa pozioma F_r przyrasta zaś o

(2) $$dF_r = dm \cdot a_{odśr} = \omega^2 r dm = \rho\omega^2 r ds\,.$$

Dla wiotkiego łańcuszka siła napięcia ma w każdym punkcie kierunek styczny do niego, tzn.

(3) $$\frac{dh}{dr} = -\frac{F_h}{F_r}$$

(minus pochodzi stąd, że $dr < 0$, podczas gdy F_h i F_r uważamy za dodatnie). Wynika stąd procedura numeryczna pozwalająca wyznaczyć długość łańcuszka l przy danych g, ρ, ω i danej odległości r_0 dolnego końca od osi obrotu. Wybrawszy odpowiednio mały krok ds zaczynamy od $F_h = F_r = 0$ w dolnym końcu, znajdujemy z równań (1) i (2) przyrosty dF_h i dF_r, następnie obliczamy $dh = dsF_h/F$ i $dr = -dsF_r/F$ (gdzie F jest całkowitą siłą, $F = \sqrt{F_h^2 + F_r^2}$) i powtarzamy operacje tak długo, dopóki r nie osiągnie zera. Długość l można na koniec obliczyć ze wzoru $l = \dfrac{F_h}{g\rho}$. W praktyce możemy w tych rachunkach położyć $g = \rho = \omega = 1$, gdyż jest to równoważne wyrażeniu długości r_0 i l w jednostkach g/ω^2. Analiza numeryczna wykazuje, że im mniejsze r_0, tym mniejsza jest wyliczona wartość l, przy czym dla $r_0 \to 0$ dąży ona do minimalnej wartości 1,45... Przekształcając

$$1,45 \approx \frac{l}{g/\omega^2} = \frac{l\omega^2}{g}$$

znajdujemy $\omega_{min} \approx \sqrt{1,45\frac{g}{l}} \approx 1,20\sqrt{\frac{g}{l}}$. Proporcjonalność ω_{min} do $\sqrt{\frac{g}{l}}$ (bez stałej) można wyprowadzić szybciej z analizy wymiarowej. Analogiczne zadanie dotyczące punktu materialnego zawieszonego na nieważkiej nici jest znacznie łatwiejsze i występuje w wielu zbiorach zadań – współczynnik przed pierwiastkiem jest wtedy równy 1.

130. Gdy otwór ma rozmiary znacznie większe od średniej drogi swobodnej, wypływ gazu następuje według praw mechaniki płynów, a rozkład prędkości cząsteczek w gazie wypływającym jest taki sam, jak wewnątrz naczynia. Gdy otwór jest mniejszy od średniej drogi swobodnej, cząsteczki wylatują „pojedynczo", przy czym większe prawdopodobieństwo trafienia do otworu i wydostania się mają cząsteczki szybsze. Dlatego spadek energii wewnętrznej (i temperatury) jest silniejszy przy wypływie zadanej ilości gazu przez mniejszy otwór.