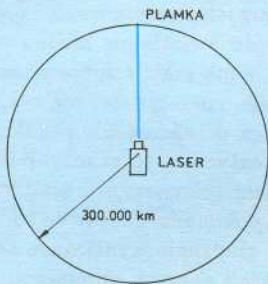
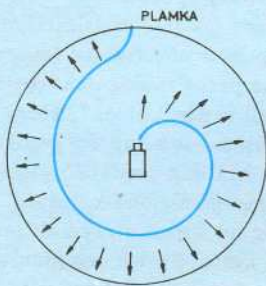


większa niż c ! A więc czyżby fala elektromagnetyczna poruszająca się w ośrodku mogła mieć prędkość większą niż prędkość światła w próżni?

A teraz trzeci sposób. Wyobraźmy sobie, że w środku kulistego ekranu o promieniu 300 000 km znajduje się laser mogący się obracać.

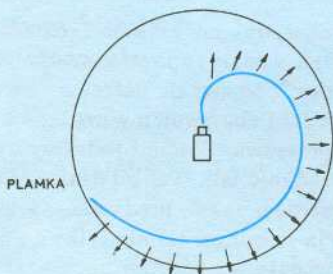


Jeśli teraz w ciągu pół sekundy obrócimy laser o 360° , to ponieważ światło rozchodzi się z prędkością 300 000 km/s, więc jeszcze przez pół sekundy punkcik na ekranie nie drgnie.



Tak wygląda przestrzenne rozmieszczenie fotonów po pełnym obrocie lasera. Strzałkami zaznaczono kierunki przemieszczania się fotonów.

Lecz po całej sekundzie (od chwili ruszenia lasera) świetlny punkcik zacznie się przesuwac po ekranie z zawrotną prędkością, tak że w ciągu pół sekundy wykona pełny obrót.



Chwilkę później. Ponieważ promień przesuwac się – w kierunku zaznaczonym strzałkami – z prędkością c , więc widać, że prędkość plamki musi znacznie przekroczyć c .

jest to możliwe. Gdybyśmy jednak założyli, że zbiory, z których wybieramy są rozłączne, to wybór reprezentacji byłby chyba zawsze możliwy. Nic więc dziwnego, że możliwość utworzenia na tych osłabionych warunkach reprezentacji dowolnej rodziny zbiorów została uznana przez Ernsta Zermelo, który porządkował nową teorię, za całkowicie dopuszczalną własność. Zyskała ona nazwę pewnika wyboru (dobra nazwa – chodzi przecież o utworzenie organu przedstawicielskiego).

Niestety, matematycy mają tę paskudną cechę, że bez przerwy dowodzą jakichś twierdzeń i stawiają sobie wszelkie pytania, jakie im przyjdą do głowy. W ramach właśnie takiej nadgorliwości Banach i Tarski udowodnili, że posługując się pewnikiem wyboru można kulę podzielić na pięć części, z których można złożyć dwie kule takie, jak wyjściowa. Nie wszystkich pojawienie się tak rewelacyjnej możliwości ucieszyło – nie jest najlepiej, gdy dyscyplina, którą uprawiamy, traci wyraźnie kontakt z rzeczywistością; pojawia się obawa, że niewybredne anegdoty o scholastykach i inne uwłaczające opowieści o uczonych pasują do nas zbyt dokładnie. Można więc było odrzucić pewnik wyboru i uprawiać matematykę bez jego pomocy. Niestety jednak jabłka z drzewa wiadomości dobrego i złego nie da się wypluć – w międzyczasie stwierdzono, że (jeśli chce się postępować ściśle) bez pewnika wyboru nie można udowodnić np. równoważności definicji ciągłości Heinego (to ta ze szkoły – za pomocą ciągów) i definicji Cauchy'ego (to ta z epsilon i delta). A przecież takie rozdwojenie ciągłości byłoby paranoją.

Była jeszcze nadzieja, że inne naturalne założenia przyjmowane o zbiorach zdecydują za nas – okaże się, że przyjęcie bądź odrzucenie pewnika wyboru jest wymuszone przez inne potrzebne własności. Niestety, i ta nadzieja zawiodła. W 1963 roku Paul Cohen udowodnił, że zarówno przyjmując pewnik wyboru, jak i go odrzucając, nie otrzymamy sprzeczności z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości, zaproponowanymi przez Zermelo. W ten sposób całą odpowiedzialność za to, jaka będzie matematyka, muszą na siebie wziąć matematycy. Niby było to i tak oczywiste, ale nikt się nie spodziewał, że jest aż tak duża dowolność w tworzeniu matematyki.

Wynik Cohena był wielkim osiągnięciem podstaw matematyki, ale – paradoksalnie – znacznie obniżył rangę podstaw. Skoro nie można się od tej dyscypliny dowiedzieć niczego decydującego, a tylko poznawać głąb dowolności, to może lepiej tego nie robić.

Już od paru stuleci matki przestrzegają swoje córki, by zbyt długo nie przypatrywały się sobie w lustrze – po pewnym czasie można w lustrze dojrzeć diabła. A matematycy nie słuchali, przyglądali się sobie najdokładniej, jak umieli, i teraz wiedzą, że tego, czego dowiedzieć się chcieli, dowiedzieć się nie można.

Marek KORDOS

Jak zarobić milion dolarów?

Każdy wie, jak zaprzeczyć implikacji. Mianowicie, zdanie $\neg(p \rightarrow q)$ równoważne jest zdaniu $p \wedge \neg q$. Reguła ta jest bardzo często wykorzystywana przy dowodach nie wprost.

No, dobrze. Zobaczmy, jakie wnioski z niej wynikają. Weźmy takie oto zdanie: „Jeśli będę miał milion dolarów, to zjem Słońce”.

Bzdura, jakich mało! A więc prawdziwe jest zaprzeczenie tego zdania, czyli posługując się regułą zaprzeczenia implikacji wnioskujemy, iż prawdziwe jest zdanie:

„Będę miał milion dolarów i nie zjem Słońca”.

A więc prawdą jest, że będę miał milion dolarów! Nigdy nie widziałem prostszego sposobu zrobienia majątku. A może coś jest nie tak z naszym rozumowaniem? Istotnie. Niestety, popełniliśmy błąd. Uznaliśmy bowiem, że początkowe zdanie jest ewidentnym fałszem. A przecież zdanie to w odniesieniu – jak sądzę – do większości Czytelników ma postać

$\underbrace{\text{Będę miał } 10^6 \$}_{\text{fałsz}} \rightarrow \underbrace{\text{zjem Słońce}}_{\text{fałsz}}$

A takie zdanie – z fałszu wynika fałsz – zawsze jest prawdziwe – jak widać, czasami wbrew naszej intuicji. Jak się jednak dobrze zastanowić, to często sami używamy podobnych zdań w mowie potocznej. Na przykład: „Przedaj mi kaktus wyrośnie na dłoni niż zarobisz milion dolarów”.

Piotr HAJŁASZ