Diabeł w lustrze

Lecąca strzała w każdym momencie jest w jakimś miejscu. Ale skoro w nim **jest**, *więc nie porusza się.*

Kreteńczyk twierdzi, że wszyscy Kreteńczycy kłamią. Czy można mu wierzyć?

Jeśli zbiór X składa się z takich elementów, które nie są swoimi elementami, to czy sam jest swoim elementem?

Pierwsze z zacytowanych zdań pochodzi z V wieku p.n.e., ostatnie z końca XIX wieku. Każde z nich formułuje jakąś *aporię*, czyli trudność. Zdań tego rodzaju, to znaczy głupich pytań, na które nie sposób odpowiedzieć inaczej niż *odczep się*, historia ludzkiego myślenia naprodukowała bez liku. I na ogół służyły one do intelektualnego przekomarzania się. Chyba że trafiały na zbyt ambitnych.

Grupa zawodowa, do której mam zaszczyt się zaliczać, od samego powstania była zbyt ambitna. Już sama nazwa MATEMATYKA zawiera w sobie niewiele skromności (pochodzi od greckiego *mathema*, co oznacza umiejętność; *mathein* oznacza uczyć się). Bliższe przyjrzenie się ogólnym zamierzeniom przyświecającym jej narodzinom stawia sprawę jeszcze bardziej jednoznacznie – miała to być wiedza pewna, w odróżnieniu od innych nauk (nawet podział na nauki ścisłe i rozwiązłe okazywał się być zbyt mało podkreślający wyjątkowość matematyki). A jako wiedza pewna nie mogła dopuścić do tego, by chociażby najgłupsze pytanie dotyczące jej dziedziny pozostało bez całkowicie jednoznacznej odpowiedzi.

Jaka jest rada na pojawianie się aporii, żeby nie powiedzieć wprost: paradoksów? Jest nią uściślenie czy, jak kto woli, rygoryzacja pojęć i metod. Oba te słowa niosą, co prawda, w sobie zapowiedź klęski – pierwsze sugeruje ciasnotę, a drugie sztywność – ale program uściślenia, rygoryzacji czy, jak mówiono, dania matematyce solidnych podstaw, pod koniec ubiegłego stulecia (gdy paradoksów namnożyło się bez liku) uznano za ważny i przez ponad pół wieku realizowano go z wielkim nakładem sił i środków.

Ustalono, co to jest teoria (mianowicie: zbiór zdań zamknięty ze względu na wnioskowanie), ustalono, co to jest zdanie (wyrażenie zbudowane zgodnie z zamkniętą listą reguł i w określonym języku), ustalono, co to jest język itd. Potem powiedziano, kiedy teoria jest dobrą teorią. Ma ona w tym celu być przede wszystkim niesprzeczna (z dwóch przeciwnych zdań co najwyżej jedno ma być jej twierdzeniem), ma być zupełna (z dwóch przeciwnych zdań co najmniej jedno ma być jej twierdzeniem), ma być kategoryczna (jej modele, czyli te obiekty, do których pasuje, mają mieć identyczną budowę), ma też być rozstrzygalna (czyli musi istnieć sposób na stwierdzenie w skończonej liczbie kroków, czy dane zdanie w jej języku jest twierdzeniem, czy nie). Były i inne warunki, ale i tych było dosyć na to, by po pewnym czasie matematycy przekonali się, że dla takiej np. arytmetyki (zwyczajnych liczb rzeczywistych) żadnego z tych warunków nie da się udowodnić (Gödel, Skolem, Löwenheim). Przez „drobną modyfikację" warunków gry (użycie teorii drugiego rzędu) zdołano jedynie zapewnić arytmetyce liczb rzeczywistych kategoryczność. Inne chwyty pozwoliły zapewnić tejże arytmetyce niesprzeczność (Gentzen). Wiadomo, arytmetyka liczb rzeczywistych jest tak powszechnie stosowana, że można dopuścić się wielu „innowacji", by obronić jej dobre imię.

Z innymi jednak obiektami zainteresowań matematyki nie poszło już tak łatwo. Oczywiście, były teorie, które spełniały wszystkie żądane warunki (specjalnie w tym celu je wymyślono), ale kłopot był ze znalezieniem dla nich sensownego zastosowania gdziekolwiek. Były jednak i takie, które nie dość, że były złe, to jeszcze nie bardzo było wiadomo, jak je poprawić.

Najbardziej doniosłym przykładem jest teoria mnogości, która (na domiar złego) sama została powołana do życia (Cantor), by umożliwiać uściślanie innych, bardziej z codzienną praktyką związanych teorii matematycznych. Po pierwszych, zrozumiałych w nowo tworzonej dyscyplinie, trudnościach w ustaleniu sposobu, w jaki można bez popadania w sprzeczności mówić o zbiorach, przed jej twórcami stanęły pytania, w jakie własności stworzone właśnie zbiory należy wyposażyć. Wydawało się, że sprawę da się bezkonfliktowo rozwiązać, bo przecież można było się zgodzić na każde, nie prowadzące do absurdów rozwiązanie. I wtedy okazało się, że rozwiązań nie prowadzących do absurdów nie ma.

W *Delcie* 2/1992 P. Grzegorzewski pisze o problemie wyboru reprezentacji dla pewnej klasy zbiorów. Przez reprezentację rozumie taki nowy zbiór, w którym każdy z wyjściowych zbiorów ma swojego reprezentanta i różne zbiory mają różnych reprezentantów. I przytacza twierdzenie Halla, które mówi, kiedy

Jak przekroczyć prędkość światła?

Piotr HAJŁASZ

Opiszemy cztery sposoby przekroczenia prędkości światła. Nie będą to, „oczywiście", wszystkie możliwe metody. No, ale przecież teoria względności mówi, że prędkości światła nie można pokonać. Czy tu nie ma jakiejś sprzeczności? Oczywiście, sprzeczności nie ma, mimo że sposoby na przekroczenie prędkości światła będą autentyczne, to znaczy, poza jednym przykładem (pierwszym), prędkość światła zostanie pokonana naprawdę i nie będzie to żadne złudzenie wynikające ze złej interpretacji naszych obserwacji. Pozorna sprzeczność z teorią względności bierze się stąd, że zwykle nie precyzuje się, co należy rozumieć przez niemożność przekroczenia prędkości światła. No, ale nie uprzedzajmy wypadków. Wytłumaczenie paradoksów podamy na końcu.

Oto pierwszy sposób.
Pod koniec lat siedemdziesiątych astronomowie obserwując fale radiowe wysyłane przez radiogalaktykę 3C120 zauważyli w niej „obłok", który przemieszcza się ze sporą prędkością kątową. Mnożąc prędkość kątową poruszającego się obłoku przez odległość od Ziemi otrzymali prędkość liniową, która, ku ich osłupieniu, wynosiła 2,1 prędkości światła.

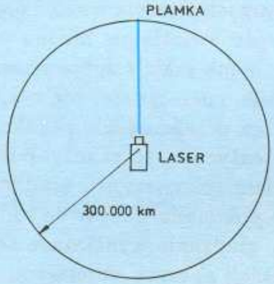
Podobne paradoksalne prędkości zaobserwowano w kilku kwazarach. W kwazarze 3C279 znaleziono nawet obiekt poruszający się z prędkością dziesięciokrotnie przewyższającą prędkość światła!

Zanim jednak wytłumaczymy, w jaki sposób możemy obserwować tak paradoksalne prędkości, przejdźmy do następnego sposobu.

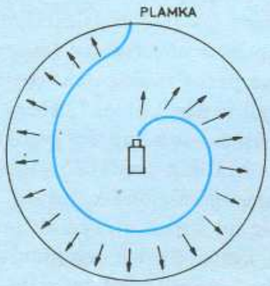
Kiedy obserwujemy koliście rozchodzące się fale na wodzie (np. po rzuceniu kamieniem), to zwykle patrzymy na grzbiet jednej z fal i obserwujemy prędkość, z jaką on się przesuwa. Skłonni jesteśmy uznać ją za prędkość fali. Tak zdefiniowana prędkość nosi nazwę prędkości fazowej. Definicja ta odnosi się nie tylko do fal na wodzie, ale również np. do fal elektromagnetycznych.

Jeśli jednak wyliczymy prędkość fazową w ziemskiej jonosferze fal wysyłanych przez nadajniki TV (częstotliwość rzędu 100 MHz), to okaże się, że jest ona większa niż c ! A więc czyżby fala elektromagnetyczna poruszająca się w ośrodku mogła mieć prędkość większą niż prędkość światła w próżni?

A teraz trzeci sposób. Wyobraźmy sobie, że w środku kulistego ekranu o promieniu 300 000 km znajduje się laser mogący się obracać.

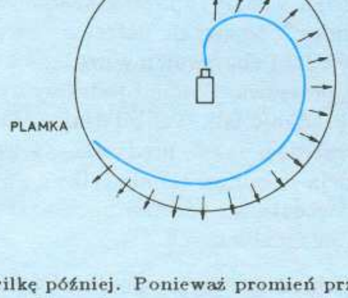


Jeśli teraz w ciągu pół sekundy obrócimy laser o 360°, to ponieważ światło rozchodzi się z prędkością 300 000 km/s, więc jeszcze przez pół sekundy punkcik na ekranie nie drgnie.



Tak wygląda przestrzenne rozmieszczenie fotonów po pełnym obrocie lasera. Strzałkami zaznaczono kierunki przemieszczania się fotonów.

Lecz po całej sekundzie (od chwili ruszenia lasera) świetlny punkcik zacznie się przesuwać po ekranie z zawrotną prędkością, tak że w ciągu pół sekundy wykona pełny obrót.



Chwilkę później. Ponieważ promień przesuwa się – w kierunku zaznaczonym strzałkami – z prędkością c, więc widać, że prędkość plamki musi znacznie przekroczyć c.

jest to możliwe. Gdybyśmy jednak założyli, że zbiory, z których wybieramy są rozłączne, to wybór reprezentacji byłby chyba zawsze możliwy. Nic więc dziwnego, że możliwość utworzenia na tych osłabionych warunkach reprezentacji dowolnej rodziny zbiorów została uznana przez Ernsta Zermelo, który porządkował nową teorię, za całkowicie dopuszczalną własność. Zyskała ona nazwę pewnika wyboru (dobra nazwa – chodzi przecież o utworzenie organu przedstawicielskiego).

Niestety, matematycy mają tę paskudną cechę, że bez przerwy dowodzą jakichś twierdzeń i stawiają sobie wszelkie pytania, jakie im przyjdą do głowy. W ramach właśnie takiej nadgorliwości Banach i Tarski udowodnili, że posługując się pewnikiem wyboru można kulę podzielić na pięć części, z których można złożyć dwie kule takie, jak wyjściowa. Nie wszystkich pojawienie się tak rewelacyjnej możliwości ucieszyło – nie jest najlepiej, gdy dyscyplina, którą uprawiamy, traci wyraźnie kontakt z rzeczywistością; pojawia się obawa, że niewybredne anegdoty o scholastykach i inne uwłaczające opowieści o uczonych pasują do nas zbyt dokładnie. Można więc było odrzucić pewnik wyboru i uprawiać matematykę bez jego pomocy. Niestety jednak jabłka z drzewa wiadomości dobrego i złego nie da się wypluć – w międzyczasie stwierdzono, że (jeśli chce się postępować ściśle) bez pewnika wyboru nie można udowodnić np. równoważności definicji ciągłości Heinego (to ta ze szkoły – za pomocą ciągów) i definicji Cauchy'ego (to ta z epsilonem i deltą). A przecież takie rozdwojenie ciągłości byłoby paranoją.

Była jeszcze nadzieja, że inne naturalne założenia przyjmowane o zbiorach zdecydują za nas – okaże się, że przyjęcie bądź odrzucenie pewnika wyboru jest wymuszone przez inne potrzebne własności. Niestety, i ta nadzieja zawiodła. W 1963 roku Paul Cohen udowodnił, że zarówno przyjmując pewnik wyboru, jak i go odrzucając, nie otrzymamy sprzeczności z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości, zaproponowanymi przez Zermelo. W ten sposób całą odpowiedzialność za to, jaka będzie matematyka, muszą na siebie wziąć matematycy. Niby było to i tak oczywiste, ale nikt się nie spodziewał, że jest aż tak duża dowolność w tworzeniu matematyki.

Wynik Cohena był wielkim osiągnięciem podstaw matematyki, ale – paradoksalnie – znacznie obniżył rangę podstaw. Skoro nie można się od tej dyscypliny dowiedzieć niczego decydującego, a tylko poznawać głąb dowolności, to może lepiej tego nie robić.

Już od paru stuleci matki przestrzegają swoje córki, by zbyt długo nie przypatrywały się sobie w lustrze – po pewnym czasie można w lustrze dojrzeć diabła. A matematycy nie słuchali, przyglądali się sobie najdokładniej, jak umieli, i teraz wiedzą, że tego, czego dowiedzieć się chcieli, dowiedzieć się nie można.

Marek KORDOS

Jak zarobić milion dolarów?

Każdy wie, jak zaprzeczyć implikacji. Mianowicie, zdanie $\neg(p \to q)$ równoważne jest zdaniu $p \wedge \neg q$. Reguła ta jest bardzo często wykorzystywana przy dowodach nie wprost.

No, dobrze. Zobaczmy, jakie wnioski z niej wynikają. Weźmy takie oto zdanie: „Jeśli będę miał milion dolarów, to zjem Słońce".
Bzdura, jakich mało! A więc prawdziwe jest zaprzeczenie tego zdania, czyli posługując się regułą zaprzeczenia implikacji wnioskujemy, iż prawdziwe jest zdanie:
„Będę miał milion dolarów i nie zjem Słońca".
A więc prawdą jest, że będę miał milion dolarów! Nigdy nie widziałem prostszego sposobu zrobienia majątku. A może coś jest nie tak z naszym rozumowaniem? Istotnie. Niestety, popełniliśmy błąd. Uznaliśmy bowiem, że początkowe zdanie jest ewidentnym fałszem. A przecież zdanie to w odniesieniu – jak sądzę – do większości Czytelników ma postać

$$\underbrace{\text{Będę miał } 10^6\,\$}_{\text{fałsz}} \Rightarrow \underbrace{\text{zjem Słońce}}_{\text{fałsz}}$$

A takie zdanie – z fałszu wynika fałsz – zawsze jest prawdziwe – jak widać, czasami wbrew naszej intuicji. Jak się jednak dobrze zastanowić, to często sami używamy podobnych zdań w mowie potocznej. Na przykład:
„Prędzej mi kaktus wyrośnie na dłoni niż zarobisz milion dolarów".

Piotr HAJŁASZ

Paradoksy Olbersa

Jeden z podstawowych postulatów kosmologii, tzw. zasada kopernikowska, głosi, że Wszechświat oglądany z dowolnego miejsca wygląda średnio tak samo. Ta bardzo naturalna i bogata w skutki zasada, zastosowana bezpośrednio do naszego Wszechświata, prowadzi jednak natychmiast do tzw. paradoksu Olbersa. Jest on formułowany w dwóch wersjach: fotometrycznej i grawitacyjnej (zwanej też grawitacyjnym paradoksem Seeligera).

Wersja fotometryczna mówi, że skoro na mocy zasady kopernikowskiej gęstość przestrzenna gwiazd jest wszędzie średnio taka sama, to całe niebo powinno świecić nieskończenie jasno. Wyobraźmy sobie bowiem gwiazdy znajdujące się w małym kącie bryłowym $d\omega$ w odległości od nas zawartej między r a $r + dr$. Ich liczba w tak określonym elemencie objętości jest proporcjonalna do $r^2 dr d\omega$. Oświetlenie na Ziemi dawane przez każdą gwiazdę jest proporcjonalne do r^{-2}, zatem oświetlenie dawane przez gwiazdy z tego elementu objętości od odległości już nie zależy i jest proporcjonalne do $dr d\omega$. Wynik sumowania (całkowania) po nieskończonej objętości Wszechświata jest wobec tego nieskończony. W naszym rozumowaniu milcząco traktowaliśmy gwiazdy jak punkty. W rzeczywistości są one widoczne jako wprawdzie bardzo małe, ale tarczki i dlatego przy równomiernym wypełnieniu przestrzeni przez gwiazdy patrząc w dowolnym kierunku powinniśmy widzieć powierzchnię gwiazdy. Oświetlenie na Ziemi byłoby wtedy skończone, ale całe niebo powinno świecić z jasnością powierzchniową przeciętnej gwiazdy. Tymczasem niebo jest jednak czarne! Tu uwaga: nie oznacza to, że z fragmentów nieba pomiędzy gwiazdami nie dociera żadne promieniowanie, a tylko, że tego promieniowania jest tak mało, że niebo widzimy tam jako czarne.

Odrzucenie zasady kopernikowskiej byłoby z wielu powodów niekorzystne dla przyrodoznawstwa, dlatego od samego początku próbowano znaleźć sposób na wybrnięcie z tej sprzeczności. Taką próbą była np. hipoteza Wszechświata hierarchicznego. Postulowało się mianowicie, że gwiazdy grupują się w galaktykach, galaktyki w gromadach galaktyk, gromady galaktyk tworzą zgrupowania wyższego rzędu itd. W modelu takim gęstość przestrzenna gwiazd obliczana dla coraz większych obszarów byłaby coraz mniejsza, ponieważ w objętości zawierającej strukturę wyższego rzędu zawsze byłyby zawarte gwiazdy o gęstości odpowiadającej strukturom poprzedniego rzędu plus próżnia między nimi. W rezultacie dla Wszechświata nieskończonego gęstość gwiazd dążyłaby do zera, a więc niebo mogłoby być czarne. Problem grupowania się galaktyk jest, co prawda, do dziś istotny dla astronomii, ale fotometryczny paradoks Olbersa stracił znaczenie, a przyczyną stało się odkrycie ucieczki galaktyk. Mianowicie, nawet gdyby gwiazdy wypełniały przestrzeń równomiernie, wskutek ich dopplerowskiego poczerwienienia (obniżenia energii kwantów światła) i ekspansji całego Wszechświata (obniżenia gęstości kwantów) oświetlenie dawane przez gwiazdy z odległości r spadałoby z jej wzrostem gwałtowniej niż r^{-2}. Sumowanie (całkowanie) oświetleń ze wszystkich odległości (do nieskończoności) dałoby wtedy wynik skończony, a więc, być może, niebo byłoby czarne.

Wersja grawitacyjna paradoksu jest subtelniejsza, a trudności są innego typu. Gdyby mianowicie Wszechświat miał być nieskończony i równo wypełniony materią, to z każdego kierunku powinniśmy odczuwać nieskończone przyciąganie grawitacyjne. Tu można by powiedzieć, że skoro z każdego kierunku, to nie ma problemu, bo wszystko się znosi. Nie jest to jednak takie proste, bowiem mogłyby się tak znosić oddziaływania dowolnie silne, byle skończone, natomiast w ogóle nie wiadomo, czy $-\infty$ i $+\infty$ mogą się jakkolwiek kasować. Na szczęście stało się to również nieistotne po odkryciu ekspansji Wszechświata oraz tego, że grawitację, tak naprawdę, opisuje nie prawo Newtona, lecz równania Einsteina.

Tomasz KWAST

Możemy więc z łatwością obliczyć prędkość, z jaką będzie się przesuwał ów punkcik:

$$2\pi \cdot 300\,000 \text{ km}/0,5 \text{ s} > 12c\,.$$

A więc prędkość światła zostanie przekroczona ponad 12 razy! Gdyby wziąć ekran o jeszcze większym promieniu bądź obrócić laser z większą prędkością, to moglibyśmy otrzymać dowolnie dużą prędkość poruszania się świetlnego punktu po ekranie.

I wreszcie ostatni sposób. Sposób ten będzie najprostszy. Do zrozumienia jego nie będzie potrzeba żadnych wiadomości z fizyki i dzięki temu będzie tutaj najbardziej widoczne, dlaczego nie prowadzi on do sprzeczności z teorią względności.

Nieraz wystawy są ozdabiane rurkami, wewnątrz których znajdują się żaróweczki – jedna obok drugiej. Żaróweczki te po kolei zapalają się i gasną, dzięki czemu odnosimy wrażenie, jakby wewnątrz rurki przesuwał się świetlny punkt.

Wyobraźmy więc sobie następujące doświadczenie. Ustawmy żaróweczki jedna obok drugiej w odstępach 1 cm na odcinku o długości 1 000 000 km, przy czym tak podobierajmy czasy zapalania się żaróweczek, że kolejna żaróweczka zapala się o 10^{-11} s później niż poprzednia. Ponieważ mamy akurat 10^{11} żaróweczek, więc ostatnia zapali się o sekundę później niż pierwsza. Obserwator będzie więc widział punkt świetlny, który pokona odległość miliona kilometrów w ciągu jednej sekundy, a więc ponad trzykrotnie przekroczy prędkość światła!

Ale czy to przeczy teorii względności? Oczywiście, że nie, gdyż poruszaniu się świetlnego punkcika tak naprawdę nie będzie towarzyszył żaden rzeczywisty ruch. To jest tylko złudzenie. Żadna cząstka, żadna fala, żadna informacja nie biegnie wraz z tym punktem.

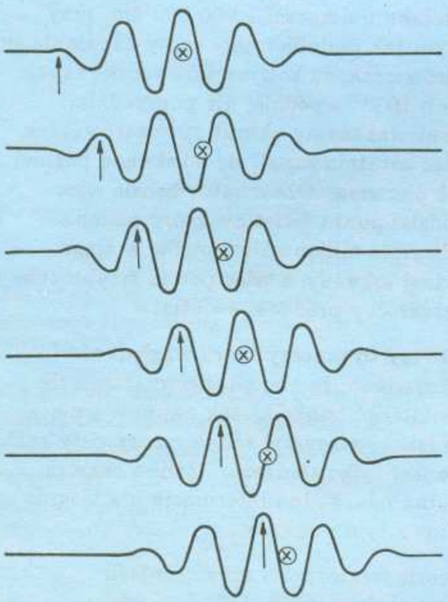
Teoria względności mówi, że jeśli w punkcie A zaszło jakieś zjawisko, to żaden efekt tego zjawiska, żadna informacja o nim nie dotrze do punktu B z prędkością większą niż c. A więc nie możemy wysłać z punktu A do punktu B żadnej cząstki, żadnej fali z prędkością większą niż c. Natomiast teoria względności nie eliminuje innych sposobów pokonania prędkości światła, takich jak choćby opisane w powyższych przykładach. I choć poza pierwszym przykładem (tym z galaktyką) przekroczenie prędkości światła nastąpiło naprawdę, to jednak uzasadnione wydaje się nazwanie tych sposobów pozornymi, uznając w ten sposób, że przez przekroczenie prędkości światła rozumie się to, co ten termin oznacza w teorii względności.

Przeanalizujmy teraz powyższe cztery sposoby – od ostatniego do pierwszego – aby się przekonać, że rzeczywiście nie prowadzą one do sprzeczności z teorią względności.

Ostatni sposób już przeanalizowaliśmy. Przykład poprzedni (ten z laserem) jest dokładnie tej samej natury, co przykład z żaróweczkami. Jedynie tylko to, że doświadczenie jest trochę bardziej skomplikowane, może wywołać wrażenie, że przykład ten jest bardziej subtelny.

Przejdźmy teraz do omówienia przykładu z falą elektromagnetyczną. Zastanówmy się, czy to, że prędkość fazowa fali jest większa niż c, rzeczywiście oznacza, że fala porusza się z prędkością większą niż c, to znaczy, czy fala ta przenosi informację, energię... z prędkością większą niż c?

Poniższy rysunek pokazuje, że rzeczywista prędkość „paczki falowej" może być mniejsza od prędkości fazowej.



Prędkość fazowa (prędkość strzałki) może być znacznie większa od prędkości całej paczki falowej (prędkość krzyżyka).

Otóż, cała informacja, energia... porusza się z paczką falową, a więc prawdziwa prędkość, z jaką porusza się fala, to prędkość całej paczki falowej, a ta jest już zawsze nie większa niż c. Prędkość ta nazywa się prędkością grupową.

Pozostał teraz już tylko jeden paradoks do wytłumaczenia – ten z galaktyką.

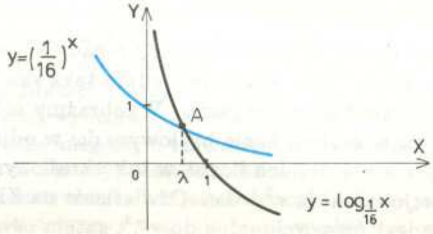
Spróbuj wykryć błędy

Robert HAJŁASZ

1. ***Ile rozwiązań ma równanie***

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x\,?$$

Rozwiązanie.



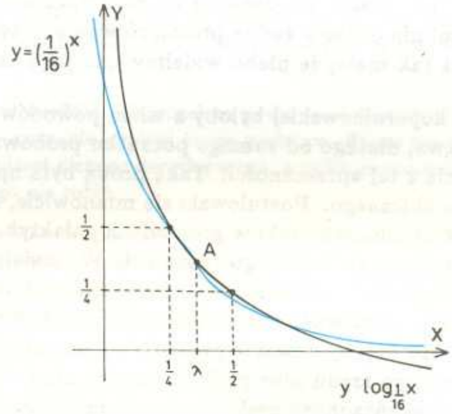
Odpowiedź: Dokładnie jedno.

Tymczasem

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4}, \quad \text{zatem } x_1 = \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}, \quad \text{zatem } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Można dowieść, że dane równanie ma dokładnie trzy rozwiązania: $\frac{1}{4}, \lambda, \frac{1}{2}$. Błędny był wykres. Powinien on wyglądać tak:



2. ***Dla jakiej wartości parametru a układ równań***

$$\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ y^2 + x^2 = a \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Rozwiązanie.

I sposób

Przypuśćmy, że dla pewnej wartości a układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y). Wtedy otrzymujemy następujące zdania prawdziwe

$$y^2 + y = 3 + a,$$

$$y^2 + y - (3 + a) = 0.$$

Skoro jest tylko jedno (x, y), więc jest tylko jedno y. A jeżeli tak, to musi być $\Delta = 0$, czyli

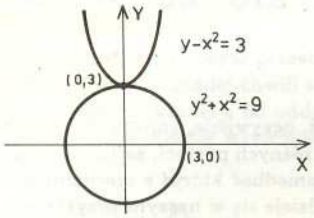
$$1 + 4(3 + a) = 0,$$

$$a = -\frac{13}{4}.$$

Zatem wykazaliśmy, że jeśli istnieje a, przy którym układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to $a = -13/4$. Innymi słowy, wykazaliśmy, że $a = -13/4$ to jedyny kandydat na wartość parametru a, przy którym układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Czy kandydat „przejdzie", przekonujemy się przez sprawdzenie. Podstawiając $a = -13/4$ do równania $y^2 + x^2 = a$ dostajemy sprzeczność.

Odpowiedź: Dla żadnej.

II sposób



Odpowiedź: Dla $a = 9$. Wtedy jedynym rozwiązaniem jest para $(0,3)$.

I sposób jest błędny, II sposób jest poprawny. Błąd w sposobie I pojawił się, gdy uznaliśmy, że przy dokładnie jednym rozwiązaniu układu musi być $\Delta = 0$. Otóż, nie musi. Istotnie, popatrzmy bowiem na rysunek. Widać, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie $(0,3)$, natomiast $\Delta \neq 0$. No bo obliczmy Δ.

$$y^2 + y - 12 = 0,$$
$$\Delta = 49.$$

Wtedy $y_1 = -4$, $y_2 = 3$, ale y_1 zostaje przez równanie $y - x^2 = 3$ odrzucone i zostaje tylko y_2.

3. *Wiedząc, że $a^2 + a + 1 = 0$, oblicz $a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}}$.*

Rozwiązanie.
Mnożąc obie strony danej równości przez a mamy $a^3 + a^2 + a = 0$, stąd $a^3 = -\underbrace{(a^2+a)}_{-1} = +1$.

I sposób

$$a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}} = (a^3)^{663}a^2 + \frac{1}{(a^3)^{663}a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} =$$
$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 - 2 = \left(\frac{-a}{a}\right)^2 - 2 = -1.$$

Odpowiedź: -1.

II sposób

$$a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}} = (a^3)^{\frac{1991}{3}} + \frac{1}{(a^3)^{\frac{1991}{3}}} = 1 + 1 = 2.$$

Odpowiedź: 2.

Gdy „rzecz dzieje się w zbiorze liczb rzeczywistych", wtedy oba sposoby są złe. Nie ma bowiem takiego rzeczywistego a, że $a^2 + a + 1 = 0$. Gdy „rzecz dzieje się w zbiorze liczb zespolonych", wtedy I sposób jest poprawny, II sposób zaś jest zły. Zły dlatego, że wzór $(z^k)^l = z^{kl}$ obowiązuje, przy zespolonym z, dla k, l całkowitych. Weźmy np. $k = 4$, $l = 1/4$. Wtedy wzór się „psuje". Istotnie

$$\underbrace{(i^4)^{\frac14}}_{\underbrace{(iiii)^{\frac14}}_{1}} = \underbrace{i^{4\cdot\frac14}}_{i}.$$

Zatem $1 = i$. Sprzeczność.

4. *Oblicz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

Rozwiązanie.

I sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

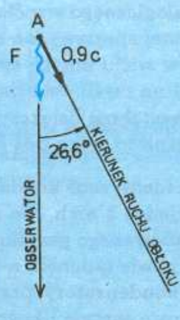
II sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

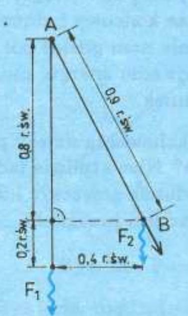
I sposób jest błędny. II sposób jest poprawny. W sposobie I zastosowaliśmy twierdzenie o granicy sumy. Twierdzenie to wolno stosować tylko wtedy, gdy składniki tej sumy są zbieżne i liczba tych składników jest stała. Tymczasem u nas liczba ta rośnie wraz z n.

Paradoks ten jest nieco innego rodzaju niż trzy pozostałe. Mianowicie, nie mamy tutaj do czynienia z żadnym przekroczeniem prędkości światła. To, że wydaje się nam, iż jakiś obłok porusza się z prędkością większą niż c, jest po prostu złą interpretacją danych doświadczalnych. Nie, nie twierdzę, że to wynika z niedokładności pomiarów. To jest coś znacznie bardziej subtelnego.

Oczywiście, nikt nie wie, jak to jest naprawdę. Istnieje jednak hipoteza bardzo ładnie tłumacząca obserwowanie takich prędkości. Wyobraźmy sobie, że obserwowany obłok porusza się z prędkością 0,9 c pod kątem 26,°6 do prostej łączącej nas z obłokiem.



Niech w chwili $t = 0$ obłok znajduje się w punkcie A. Wysyła on wówczas z tego punktu foton F_1 w naszą stronę. W chwili $t = 1$ rok obłok znajduje się w punkcie B. Wysyła on wówczas z tego punktu foton F_2 w naszą stronę.



Otóż, z rysunku widać, że foton F_1 wyprzedza w „pionie" foton F_2 o 0,2 roku świetlnego, podczas gdy różnica ich współrzędnych w poziomie wynosi 0,4 roku świetlnego.

Po upływie milionów lat, gdy fotony dotrą na Ziemię, najpierw dotrze foton F_1, a po upływie 0,2 roku dotrze foton F_2. Natomiast my będziemy obserwowali, że dotarły one z punktów w przestrzeni odległych o 0,4 roku świetlnego. Stąd otrzymamy prędkość poprzeczną 2c, podczas gdy tak naprawdę jest ona równa „zaledwie" 0,4 c.