Gdy dwa prawa zachowania kłócą się ze sobą

Andrzej SZYMACHA

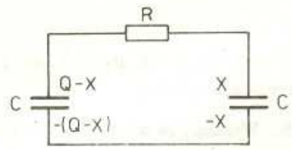
Każdy wie, co to jest kondensator i to, że może on służyć do magazynowania energii. Jeśli pojemność kondensatora wynosi C, a zgromadzony na okładce ładunek równy jest Q, energia kondensatora ma wartość $Q^2/2C$. Charakterystyczne jest występowanie w tym wzorze współczynnika $1/2$. Naiwnie można by sądzić, że skoro napięcie na okładkach wynosi Q/C, energia powinna być równa iloczynowi napięcia Q/C i ładunku Q, czyli Q^2/C.

Wyjaśnienie jest bardzo proste. Gdybyśmy zaczęli czerpać prąd z tego kondensatora i stopniowo go rozładowywali, napięcie by spadało i tylko początkowe porcje ładunku przepływałyby przy napięciu Q/C, podczas gdy końcowe przechodziłyby przez różnicę potencjałów dążącą do zera. Średnie napięcie byłoby równe $(1/2)(Q/C + 0)$ i stąd właśnie $1/2$ we wzorze na całkowitą energię. Dokładnie taki sam jest mechanizm pojawienia się analogicznego współczynnika we wzorach na energię odkształconej sprężyny, na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym i w wielu innych sytuacjach. To właśnie ten współczynnik miał na myśli ów ksiądz, któremu doniczka spadła na głowę i który westchnął dziękczynnie: „Chwała Ci, Panie, że energia kinetyczna to tylko **pół** mv^2".

Przygotujmy dwa identyczne kondensatory, ale naładujmy początkowo tylko jeden z nich. Co się stanie, gdy do końcówek kondensatora naładowanego przytkniemy końcówki tego drugiego? Niewątpliwie ładunek, a także i energia rozpłyną się pomiędzy oba kondensatory, przy czym ze względu na ich identyczność końcowe energie i końcowe ładunki powinny być takie same na każdym z nich. Pamiętając o prawie zachowania energii i o prawie zachowania ładunku można by przypuścić, że teraz na każdym z kondensatorów mamy ładunek $Q/2$ i energię $Q^2/4C$. Ale tak nie może być! Przecież podstawiając do ogólnego wzoru na energię kondensatora ładunek $Q/2$ dostaniemy $Q^2/8C$. Mnożąc tę ostatnią wartość przez 2 (bo są dwa kondensatory) dostajemy jako całkowitą wartość końcowej energii tylko połowę tego, co było na początku. Jeśli przyjmiemy, że końcowy ładunek całkowity jest równy początkowemu, ginie nam gdzieś pół energii – gdybyśmy się upierali przy zachowaniu energii, musiałby jakoś niezrozumiale rozmnożyć się ładunek.

Któremu z praw zachowania należy przyznać pierwszeństwo w tym przykładzie? Niewątpliwie ładunkowi. Nie ma takiej ludzkiej siły, by ładunek zniszczyć lub wykreować. Nie sposób także ładunek ukryć lub przegapić.

Energii też, oczywiście, zniszczyć nie można, ale ma ona tyle form, tyle różnych postaci, że łatwo przy pobieżnej analizie zjawiska zaniedbać któryś z mechanizmów jej przetwarzania. Tak też i dzieje się w naszym przykładzie. Wydostawanie się energii poza obręb rozważanych kondensatorów byłoby bardziej widoczne, wręcz oczywiste, gdybyśmy zamiast zwierać na krótko odpowiednie okładki kondensatorów połączyli jedną z par przewodnikiem o określonej wartości oporu omowego (rys.). W trakcie wyrównywania napięć (i ładunków) płynie prąd i na oporniku wydziela się ciepło Joule'a–Lenza. Mogłoby się wydawać, że straty na ciepło dają się ograniczyć do minimum przez wzięcie małego oporu, ale to złudzenie. Wydzielone ciepło łatwo obliczyć i przekonać się, że wynik nie zależy od wartości oporu, no i że, oczywiście, to wydzielone ciepło dokładnie uzupełnia wartość końcowej energii elektrostatycznej do wartości energii początkowej.



Uzyskanie tego wyniku nie wymaga praktycznie żadnych obliczeń, w szczególności nie trzeba wyznaczać czasowego przebiegu zjawiska rozładowania. Wystarczy zauważyć, że przeniesienie ładunku X z okładki pierwszego kondensatora na okładkę drugiego zmniejsza napięcie pierwszego o X/C i zwiększa napięcie drugiego o X/C, a więc zmniejsza różnicę potencjałów na końcach opornika o $2X/C$. W trakcie przeładowywania przeniesienie połowy początkowego ładunku powoduje (liniowy jako funkcja X) spadek napięcia na oporze łączącym, od początkowej wartości Q/C do końcowej wartości zero. Średnie napięcie jest więc równe $Q/2C$ i przepływ ładunku $Q/2$ spowoduje wydzielenie ciepła $Q/2 \times Q/2C$, czyli dokładnie tyle, ile „zginęło" nam przy pierwszym rachunku.

Przedstawione powyżej rozwiązanie tego niezbyt skomplikowanego paradoksu nie wyczerpuje całości problemu, gdyż jest ono poprawne jedynie przy zaniedbaniu indukcyjności pętli, jaką tworzą kondensatory i łączące je (chociażby zredukowane do samych końcówek) przewody. Może pojawić się iskrzenie, może być wypromieniowana fala elektromagnetyczna, może powstać hałas – nie mamy jednak wątpliwości, że w każdym konkretnym przypadku dokładnie pół początkowej energii elektrostatycznej rozproszy się do otoczenia.

Jak piłeczką pingpongową rozbić mur?

Bardzo prosto – strzelamy piłeczką pingpongową o masie m i prędkości v w znacznie cięższą, spoczywającą kulę o masie M. Zaniedbujemy grawitację, opory itp., tzn. rozpatrzymy zderzenie prawie sprężyste. Po zderzeniu kula o masie M porusza się z prędkością V, a nasza kulka odskoczy do tyłu z prędkością v'. Z zasady zachowania pędu mamy:

$$mv = mv' + MV .$$

Otrzymujemy, że

$$MV = m(v - v'),$$

to znaczy kula o masie M toczy się z pędem $MV > mv$, bo $v' < 0$. Zderza się ona teraz z jeszcze cięższą kulą, która w wyniku zderzenia znów nabiera pędu. Powtarzamy to jeszcze kilka razy z coraz cięższymi kulami, aż końcowa kula z olbrzymim pędem uderza w mur. Czy mur się zawali?

Na szczęście nie. Pęd kuli M po zderzeniu rośnie, ale jej energia jest mniejsza niż energia piłeczki pingpongowej. Jeśli są jeszcze jakieś straty, które zaniedbaliśmy, to tym gorzej.

Jan KALINOWSKI