Diabeł w lustrze

Lecąca strzała w każdym momencie jest w jakimś miejscu. Ale skoro w nim **jest**, *więc nie porusza się.*

Kreteńczyk twierdzi, że wszyscy Kreteńczycy kłamią. Czy można mu wierzyć?

Jeśli zbiór X składa się z takich elementów, które nie są swoimi elementami, to czy sam jest swoim elementem?

Pierwsze z zacytowanych zdań pochodzi z V wieku p.n.e., ostatnie z końca XIX wieku. Każde z nich formułuje jakąś *aporię*, czyli trudność. Zdań tego rodzaju, to znaczy głupich pytań, na które nie sposób odpowiedzieć inaczej niż *odczep się*, historia ludzkiego myślenia naprodukowała bez liku. I na ogół służyły one do intelektualnego przekomarzania się. Chyba że trafiały na zbyt ambitnych.

Grupa zawodowa, do której mam zaszczyt się zaliczać, od samego powstania była zbyt ambitna. Już sama nazwa MATEMATYKA zawiera w sobie niewiele skromności (pochodzi od greckiego *mathema*, co oznacza umiejętność; *mathein* oznacza uczyć się). Bliższe przyjrzenie się ogólnym zamierzeniom przyświecającym jej narodzinom stawia sprawę jeszcze bardziej jednoznacznie – miała to być wiedza pewna, w odróżnieniu od innych nauk (nawet podział na nauki ścisłe i rozwiązłe okazywał się być zbyt mało podkreślający wyjątkowość matematyki). A jako wiedza pewna nie mogła dopuścić do tego, by chociażby najgłupsze pytanie dotyczące jej dziedziny pozostało bez całkowicie jednoznacznej odpowiedzi.

Jaka jest rada na pojawianie się aporii, żeby nie powiedzieć wprost: paradoksów? Jest nią uściślenie czy, jak kto woli, rygoryzacja pojęć i metod. Oba te słowa niosą, co prawda, w sobie zapowiedź klęski – pierwsze sugeruje ciasnotę, a drugie sztywność – ale program uściślenia, rygoryzacji czy, jak mówiono, dania matematyce solidnych podstaw, pod koniec ubiegłego stulecia (gdy paradoksów namnożyło się bez liku) uznano za ważny i przez ponad pół wieku realizowano go z wielkim nakładem sił i środków.

Ustalono, co to jest teoria (mianowicie: zbiór zdań zamknięty ze względu na wnioskowanie), ustalono, co to jest zdanie (wyrażenie zbudowane zgodnie z zamkniętą listą reguł i w określonym języku), ustalono, co to jest język itd. Potem powiedziano, kiedy teoria jest dobrą teorią. Ma ona w tym celu być przede wszystkim niesprzeczna (z dwóch przeciwnych zdań co najwyżej jedno ma być jej twierdzeniem), ma być zupełna (z dwóch przeciwnych zdań co najmniej jedno ma być jej twierdzeniem), ma być kategoryczna (jej modele, czyli te obiekty, do których pasuje, mają mieć identyczną budowę), ma też być rozstrzygalna (czyli musi istnieć sposób na stwierdzenie w skończonej liczbie kroków, czy dane zdanie w jej języku jest twierdzeniem, czy nie). Były i inne warunki, ale i tych było dosyć na to, by po pewnym czasie matematycy przekonali się, że dla takiej np. arytmetyki (zwyczajnych liczb rzeczywistych) żadnego z tych warunków nie da się udowodnić (Gödel, Skolem, Löwenheim). Przez „drobną modyfikację" warunków gry (użycie teorii drugiego rzędu) zdołano jedynie zapewnić arytmetyce liczb rzeczywistych kategoryczność. Inne chwyty pozwoliły zapewnić tejże arytmetyce niesprzeczność (Gentzen). Wiadomo, arytmetyka liczb rzeczywistych jest tak powszechnie stosowana, że można dopuścić się wielu „innowacji", by obronić jej dobre imię.

Z innymi jednak obiektami zainteresowań matematyki nie poszło już tak łatwo. Oczywiście, były teorie, które spełniały wszystkie żądane warunki (specjalnie w tym celu je wymyślono), ale kłopot był ze znalezieniem dla nich sensownego zastosowania gdziekolwiek. Były jednak i takie, które nie dość, że były złe, to jeszcze nie bardzo było wiadomo, jak je poprawić.

Najbardziej doniosłym przykładem jest teoria mnogości, która (na domiar złego) sama została powołana do życia (Cantor), by umożliwiać uściślanie innych, bardziej z codzienną praktyką związanych teorii matematycznych. Po pierwszych, zrozumiałych w nowo tworzonej dyscyplinie, trudnościach w ustaleniu sposobu, w jaki można bez popadania w sprzeczności mówić o zbiorach, przed jej twórcami stanęły pytania, w jakie własności stworzone właśnie zbiory należy wyposażyć. Wydawało się, że sprawę da się bezkonfliktowo rozwiązać, bo przecież można było się zgodzić na każde, nie prowadzące do absurdów rozwiązanie. I wtedy okazało się, że rozwiązań nie prowadzących do absurdów nie ma.

W *Delcie* 2/1992 P. Grzegorzewski pisze o problemie wyboru reprezentacji dla pewnej klasy zbiorów. Przez reprezentację rozumie taki nowy zbiór, w którym każdy z wyjściowych zbiorów ma swojego reprezentanta i różne zbiory mają różnych reprezentantów. I przytacza twierdzenie Halla, które mówi, kiedy

Jak przekroczyć prędkość światła?

Piotr HAJŁASZ

Opiszemy cztery sposoby przekroczenia prędkości światła. Nie będą to, „oczywiście", wszystkie możliwe metody. No, ale przecież teoria względności mówi, że prędkości światła nie można pokonać. Czy tu nie ma jakiejś sprzeczności? Oczywiście, sprzeczności nie ma, mimo że sposoby na przekroczenie prędkości światła będą autentyczne, to znaczy, poza jednym przykładem (pierwszym), prędkość światła zostanie pokonana naprawdę i nie będzie to żadne złudzenie wynikające ze złej interpretacji naszych obserwacji. Pozorna sprzeczność z teorią względności bierze się stąd, że zwykle nie precyzuje się, co należy rozumieć przez niemożność przekroczenia prędkości światła. No, ale nie uprzedzajmy wypadków. Wytłumaczenie paradoksów podamy na końcu.

Oto pierwszy sposób.
Pod koniec lat siedemdziesiątych astronomowie obserwując fale radiowe wysyłane przez radiogalaktykę 3C120 zauważyli w niej „obłok", który przemieszcza się ze sporą prędkością kątową. Mnożąc prędkość kątową poruszającego się obłoku przez odległość od Ziemi otrzymali prędkość liniową, która, ku ich osłupieniu, wynosiła 2,1 prędkości światła.

Podobne paradoksalne prędkości zaobserwowano w kilku kwazarach. W kwazarze 3C279 znaleziono nawet obiekt poruszający się z prędkością dziesięciokrotnie przewyższającą prędkość światła!

Zanim jednak wytłumaczymy, w jaki sposób możemy obserwować tak paradoksalne prędkości, przejdźmy do następnego sposobu.

Kiedy obserwujemy koliście rozchodzące się fale na wodzie (np. po rzuceniu kamieniem), to zwykle patrzymy na grzbiet jednej z fal i obserwujemy prędkość, z jaką on się przesuwa. Skłonni jesteśmy uznać ją za prędkość fali. Tak zdefiniowana prędkość nosi nazwę prędkości fazowej. Definicja ta odnosi się nie tylko do fal na wodzie, ale również np. do fal elektromagnetycznych.

Jeśli jednak wyliczymy prędkość fazową w ziemskiej jonosferze fal wysyłanych przez nadajniki TV (częstotliwość rzędu 100 MHz), to okaże się, że jest ona