

# A jednak czarne!

Anna LISSOWSKA

W artykule Eugeniusza Szumakowicza pt. *Matematyka i gra w szachy* (*Delta* 4/1991) zostało postawione następujące zadanie:

*Skomponować zadanie szachowe niekonwencjonalnego typu: układ figur i pionów białych i czarnych jest symetryczny względem linii poziomo połowiącej szachownicę; temat: białe zaczynają – czarne wygrywają!*

A oto elementarne rozwiązanie tego problemu.

1. b3 – b4 (jedyne **możliwy** ruch na szachownicy), a5 : b4
2. a4 – a5 (j.w.), b4 – b3
- 3'. a5 – a6, b3 – b2 4'. a6 – a7, b2 – b1 Hetman i mat
- 3''. a5 : b6, b3 – b2 4''. b6 – b7, b2 – b1 Hetman i mat.

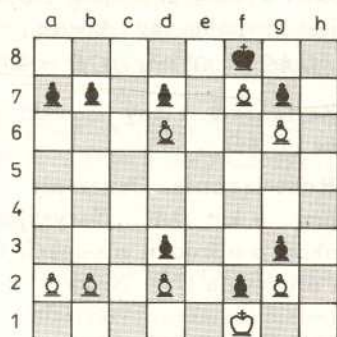
Niewielka modyfikacja konfiguracji pionków na szachownicy (rys. 2) prowadzi do innego rozwiązania. Rozwiązanie to jest o tyle interesujące, że ma w pewnym sensie charakter matematyczny. Mianowicie, można podać algorytm gwarantujący czarnym zwycięstwo. Algorytm jest następujący: białe mogą się ruszać jedynie pionkami stojącymi na liniach *a* i *b*. Na każdy ruch białych czarne odpowiadają ruchem symetrycznym, chyba że mają możliwość bicia – wtedy biją. Dalej prosto do Hetmana i mata – tak jak w poprzednim rozwiązaniu.

Na zakończenie podajmy jeszcze jedno zadanie o „matematycznym” rozwiązaniu. Choć czarne mają figurę i piona mniej, to wywalczą remis, jeżeli czarny Król cały czas będzie poruszał się tam i z powrotem po polach *f7* i *f8*. Wtedy bowiem biały Król będzie blokowany i nie ruszy się z pola *h8*, samym zaś Skoczkiem nie damy mata.

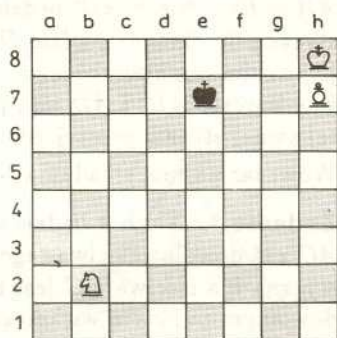
Czy jednak można zadbać o to, aby czarny Król spacerował po polach *f7* i *f8*? Czyli, innymi słowy, czy można zadbać o to, aby Skoczek nie zmusił czarnego Króla do ruchu na inne pole? Można. Wystarczy, aby pierwszy ruch czarny Król wykonał na pole takiego samego koloru co kolor, na którym stoi Skoczek, czyli, w tym przypadku, na pole czarne 1... *Kf8*. Wówczas po każdym ruchu Skoczka będzie się on znajdował na polu przeciwnego koloru niż kolor pola, na którym stoi czarny Król, a więc Skoczek nie będzie nigdy szachował tego drugiego pola, na które zamierza się ruszyć czarny Król. Gdyby jednak niefortunnie czarny Król wykonał pierwszy ruch 1... *Kf7*, to białe mogłyby już dać mu mata (jak?).



Rys. 1. Białe zaczynają i przegrywają.



Rys. 2. Białe zaczynają i przegrywają.



Rys. 3. Czarne zaczynają i remisują.

# Sprawdź wymiary!

Jan KALINOWSKI

Ten okrzyk często rozlega się na lekcjach fizyki. Czy warto sprawdzać wymiary? Przecież na lekcjach matematyki, gdzie też rozwiązuje się mnóstwo zadań, czegoś takiego się nie robi. Otóż warto. Z kilku powodów. W fizyce mamy do czynienia z wieloma wielkościami fizycznymi, mierzonymi w różnych jednostkach. Nie można porównywać wielkości mierzonych w różnych jednostkach, tak jak nie można porównywać jabłek i gruszek. Jeśli szukaną wielkością w jakimś problemie jest na przykład prędkość, a w wyniku dostajemy kg/s, to wiadomo, że zrobiliśmy błąd w naszych obliczeniach. Sprawdzenie wymiarów pozwala zorientować się bardzo szybko, czy otrzymany wynik może być sensowny. Jeśli wymiary się zgadzają, warto dopiero wtedy obliczyć wartość numeryczną.

Idea analizy wymiarowej pochodzi od Fouriera. Jean Fourier jest, oczywiście, najbardziej znany jako twórca analizy fourierowskiej, wprowadzonej w pracy *Analityczna teoria ciepła* i opublikowanej po raz pierwszy w 1822 r. w Paryżu. W tej samej pracy Fourier wprowadził też analizę wymiarową. Był chyba pierwszym, który tak otwarcie napisał, że każda wielkość fizyczna „ma swój własny wymiar i wyrazy w tym samym równaniu nie mogą być porównywane, jeśli nie mają tej samej potęgi wymiaru”. Fourier pisał wprost, że wprowadził pojęcie wymiaru, aby sprawdzać wyniki obliczeń.

Analiza wymiarów pozwala nie tylko na sprawdzenie rachunków. Dzięki niej można znaleźć sposób na zapamiętanie różnych formułek, a nawet na ich wyprowadzanie. Na tym naprawdę polega siła analizy wymiarowej. Na podstawie uważnej analizy wymiarów wielkości fizycznych, mających wpływ na badane zjawisko, można czasem zgadnąć formułę matematyczną opisującą to zjawisko. Rozpatrzmy dwa przykłady: pierwszy – bardzo prosty i drugi – bardziej skomplikowany.

Weźmy pod uwagę wahadło matematyczne: punkt materialny o masie *m* zawieszony na nierozciągliwej nici o długości *l*. Jest to, oczywiście, model matematyczny fizycznego wahadła, gdzie zaniedbujemy rozmiary ciała zawieszzonego na nici. Jeśli zgodzimy się na taki model, to tarcie powietrza pomijamy i ruch wahadła może zależeć jedynie od masy, długości nici

i przyspieszenia ziemskiego  $g$ . Zapytajmy się o okres wahań wahadła. Wielkość o wymiarze czasu można dostać tylko na jeden sposób

$$T \sim \sqrt{\frac{l}{g}},$$

a więc okres nie może zależeć od masy wahadła, gdyż nie ma jak pozbyć się kilogramów! Oczywiście, analiza wymiarowa nie pozwala na znalezienie bezwymiarowego współczynnika proporcjonalności w powyższym wzorze. Można go znaleźć wykonując, na przykład, pomiar okresu wahań dla wahadła o zadanej długości w miejscu o znanej wartości  $g$ . W ogólności zależy on od początkowego kąta odchylenia wahadła (też wielkość bezwymiarowa, a więc nie poddająca się analizie wymiarowej). Dla małych wahań wahadła współczynnik ten wynosi  $2\pi$ .

Drugi przykład, który rozpatrzmy, jest bardziej skomplikowany. Rozważmy problem oporu cieczy lepkiej działającej na płynący statek. Jakie wielkości fizyczne mogą mieć wpływ na siłę oporu? Intuicja (doświadczenie) podpowiada nam, że siła oporu może zależeć od wielu czynników. Spróbujmy ograniczyć się do najważniejszych (budujemy więc model matematyczny): siła oporu  $F$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ), prędkość statku  $v$  ( $\text{m}/\text{s}$ ), rozmiary statku  $l$  ( $\text{m}$ ), współczynnik lepkości cieczy  $\mu$  ( $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ), gęstość cieczy  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ), przyspieszenie ziemskie  $g$  ( $\text{m}/\text{s}^2$ ).

W nawiasach podaliśmy wymiary (jednostki). W naszych rozważaniach pominiemy napięcie powierzchniowe cieczy, prędkość wiatru, wielkość fal na powierzchni cieczy itp. Oznacza to, że otrzymane wyniki nie będą stosować się do ruchu owadów ślizgających się po powierzchni cieczy, żaglówek, ruchu statków w czasie silnych sztormów itp. Pomijamy też detale budowy statku wprowadzając tylko jeden parametr charakteryzujący jego rozmiary, to znaczy naszym statkiem będzie kula o promieniu  $l$ .

Ruch cieczy lepkiej opisywany jest równaniami Naviera-Stokesa, których w ogólnym przypadku nie potrafimy rozwiązać. Zastosujmy więc analizę wymiarową. Mamy do dyspozycji sześć wielkości:  $F$ ,  $l$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$  i  $v$ . Może warto wytłumaczyć, dlaczego nie rozpatrujemy masy statku jako niezależnej wielkości fizycznej. Otóż, zgodnie z prawem Archimidesa masa statku jest równa masie wypartej cieczy, a to z kolei jest rzędu  $\rho l^3$ .

## Krok po kroku

Waldemar POMPE

Na 32 Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej pojawiło się następujące

**ZADANIE.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że co najmniej jeden z kątów  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  jest mniejszy lub równy  $30^\circ$ .

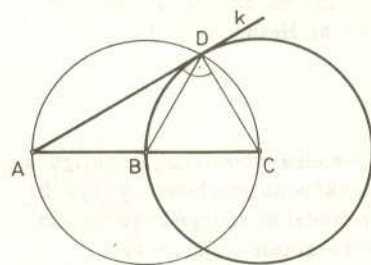
Zanim udowodnimy to twierdzenie, rozwiążmy kilka zadań.

**Zadanie 1.** Punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AC$ , punkt  $C$  jest środkiem okręgu o promieniu  $BC$ . Prosta  $k$  przechodzi przez punkt  $A$  i jest styczna do tego okręgu w punkcie  $D$ . Znaleźć rozwartość kąta  $DAC$ .

(Zadanie to pochodzi z egzaminu wstępnego do klasy matematycznej IX LO im. K. Hoffmanowej w Warszawie z 1989 r.)

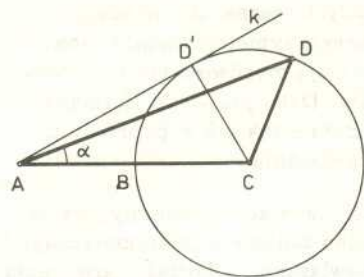
**Rozwiązanie.** Narysujmy okrąg  $o$  o środku w punkcie  $B$  i promieniu  $BC$ . Ponieważ trójkąt  $ADC$  jest prostokątny, a  $AB = BC$ , więc okrąg  $o$  przechodzi przez punkty  $A$ ,  $C$ ,  $D$ . A zatem  $BD = BC = CD$ , skąd wynika, że trójkąt  $BCD$  jest równoboczny. A więc

$$\angle DAC = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



**Zadanie 2.** Dany jest taki trójkąt  $ACD$ , że  $AC = 2CD$ . Wykazać, że  $\angle CAD \leq 30^\circ$ .

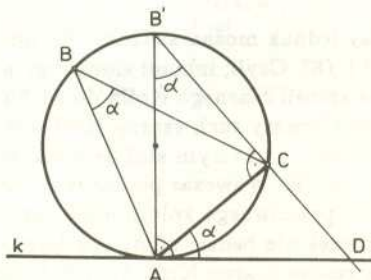
**Rozwiązanie.** Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt  $DAC$ . Narysujmy okrąg  $o$  o środku w punkcie  $C$  i promieniu  $CD$ . Niech  $B$  będzie punktem przecięcia odcinka  $AC$  z okręgiem  $o$ . Ponieważ  $AC = 2CD$ , więc  $AB = BC$ . Niech  $AD'$  będzie styczną do okręgu  $o$ , gdzie  $D'$  jest takim punktem okręgu  $o$ , że półproste  $AD'$  i  $AD$  leżą po tej samej stronie prostej  $AC$ .



Wówczas na mocy zadania 1 mamy  $\alpha = \angle CAD \leq \angle CAD' = 30^\circ$ .

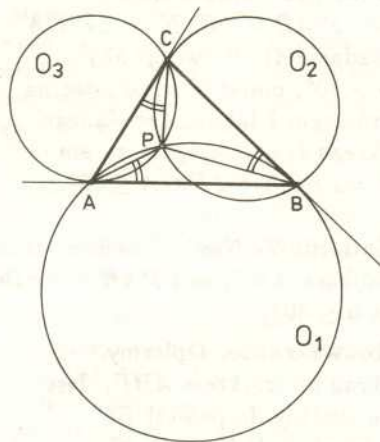
**Zadanie 3.** Niech  $k$  będzie styczną do okręgu  $o$  w punkcie  $A$ ,  $AC$  zaś dowolną cięciwą tego okręgu. Dowieść, że kąt ostry między styczną  $k$  a cięciwą  $AC$  jest równy kątowi  $ABC$ , gdzie  $B$  jest dowolnym punktem większego z łuków  $AC$  okręgu  $o$ . (W przypadku, gdy  $AC$  jest średnicą okręgu  $o$ , nie ma czego dowodzić.)

**Rozwiązanie.** Niech  $AB'$  będzie średnicą okręgu  $o$ . Prosta  $B'C$  przecina styczną  $k$  w punkcie  $D$ . Trójkąty  $ADC$  i  $B'DA$  są podobne ( $\angle ADC = \angle ADB'$ ,  $\angle B'AD = \angle ACD$ ), więc  $\angle CAD = \angle AB'C = \angle ABC$ .



**Zadanie 4.** Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta  $ABC$  istnieje taki punkt  $P$ , że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ .

**Rozwiązanie.** Narysujmy okrąg  $o_1$ , który przechodzi przez punkt  $A$  i jest styczny do prostej  $BC$  w punkcie  $B$  oraz okrąg  $o_2$  przechodzący przez punkt  $B$  i styczny do prostej  $AC$  w punkcie  $C$ . Okrąg  $o_2$  przechodzi przez dwa różne punkty prostej  $BC$ , więc nie może być do niej styczny, a zatem nie może też być styczny do okręgu  $o_1$ . Tak więc  $o_1$  i  $o_2$  oprócz wspólnego punktu  $B$  mają jeszcze jeden wspólny punkt. Nazwijmy go  $P$ . Korzystając z zadania 3 wnosimy, że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ . Należy jeszcze udowodnić, że  $P$  leży wewnątrz trójkąta  $ABC$ .

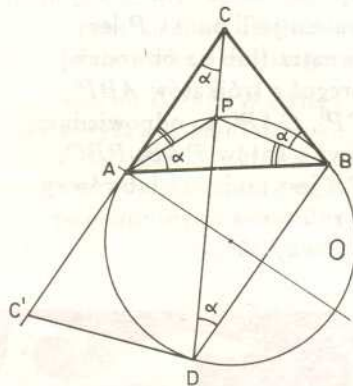


W tym celu narysujmy jeszcze okrąg  $o_3$  styczny do prostej  $AB$  w punkcie  $A$  i przechodzący przez punkt  $C$ . Okrąg  $o_3$  przechodzi również przez punkt  $P$  (zadanie 3). Zatem  $P$  jest punktem wspólnym trzech okręgów  $o_1, o_2, o_3$ . Okrąg  $o_1$  leży w całości po tej samej stronie prostej  $BC$  co punkt  $A$ ,  $o_2$  leży w całości po tej samej stronie prostej  $AC$  co punkt  $B$ ,  $o_3$  zaś leży w całości po tej samej stronie prostej  $AB$  co punkt  $C$ . Tak więc punkt wspólny okręgów  $o_1, o_2, o_3$  musi należeć do części wspólnej tych trzech półpłaszczyzn, czyli do wnętrza trójkąta  $ABC$ .

**Zadanie 5.**

Niech  $P$  będzie takim punktem wewnątrz trójkąta równoramiennego  $ABC$  ( $AC = BC$ ), że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$ . Wykazać, że  $\alpha \leq 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Opiszmy okrąg  $o$  na trójkącie  $ABP$ . Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny oraz  $\angle PAB = \angle PBC$ , więc  $\angle PAC = \angle PBA$ . A zatem okrąg  $o$  jest styczny do prostych  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$  (zadanie 3). Niech  $D$  będzie punktem przecięcia prostej  $CP$  z okręgiem  $o$ , przy czym  $D \neq P$ . Wówczas  $\angle ACP = \angle PAB = \angle PDB$ . Tak więc prosta  $AC$  jest równoległa do prostej  $BD$ . Niech  $C'$  będzie takim punktem prostej  $AC$ , że  $AC = AC'$  i  $C \neq C'$ .



Symetralna odcinka  $CC'$  przechodzi przez punkt  $A$ , jest średnicą okręgu  $o$  oraz symetralną odcinka  $BD$ , z czego wynika, że  $AC' = C'D$ . A zatem trójkąt  $CDC'$  jest takim trójkątem, w którym  $2C'D = CC'$ , skąd na mocy zadania 2  $\alpha = \angle PCA = \angle C'CD \leq 30^\circ$ .

Zauważmy, że mamy jedynie trzy podstawowe jednostki: kilogram, metr i sekundę, w których mierzy się sześć wielkości. A więc jedynie trzy bezwymiarowe ich kombinacje mogą być niezależne. Wybierzmy je w następujący sposób:

$$C_D = \frac{F}{\rho v^2 l^2},$$

$$R = \frac{vl\rho}{\mu},$$

$$N_F = \frac{v^2}{lg}.$$

Oczywiście, dowolna ich kombinacja też jest bezwymiarowa, ale wybraliśmy je tak, gdyż każda z nich wiąże się z inną cechą badanego problemu. Stała Reynoldsa  $R$  związana jest z lepkością cieczy  $\mu$ , stała Froude'a  $N_F$  wiąże siły bezwładności ( $\sim mv^2/l$ ) z siłami ciężkości ( $\sim mg$ ) w przepływie cieczy. Charakteryzuje, na przykład, fale i zawirowania na powierzchni cieczy spowodowane ruchem statku. W końcu współczynnik oporu czołowego  $C_D$  nie zależy ani od  $\mu$ , ani od  $g$ .

Analiza wymiarowa mówi nam, że bezwymiarowy współczynnik oporu czołowego  $C_D$  musi być pewną funkcją dwóch pozostałych bezwymiarowych wielkości, to znaczy

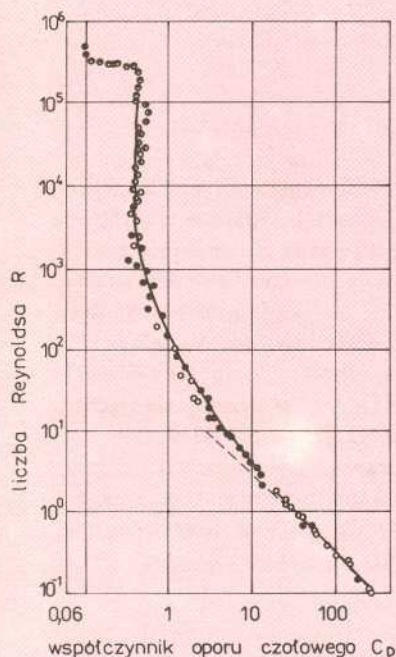
$$C_D = f(R, N_F).$$

Zalóżmy w końcu, że efekt fal tworzonych na powierzchni cieczy przez płynący statek jest zaniedbywalny (krajowym przykładem będzie okręt podwodny). Wówczas stała  $g$ , odpowiedzialna za fale na wodzie, nie powinna wejść do rozwiązania, a więc stała Froude'a w powyższym wzorze może być pominięta. W języku wyjściowych wielkości wymiarowych dostajemy więc ostateczny wzór na siłę oporu

$$(*) \quad F = \rho v^2 l^2 f(vl\rho/\mu).$$

W tym momencie można powiedzieć: no dobrze, ale przecież nie znamy funkcji  $f$ , więc jaki jest pożytek z otrzymanego wyniku? Żeby zrozumieć korzyść z naszych rozważań, zauważmy, że jeśli odłożyć na wykresie wartość siły  $F$  w zależności od długości  $l$ , to otrzymamy wiele różnych krzywych dla różnych cieczy, z których nic ciekawego nie da się odczytać. Jeśli natomiast odłożyć  $C_D$  w zależności od  $R$ , to wszystkie punkty powinny ułożyć się na jednej krzywej dla różnych cieczy i różnych rozmiarów statków!

Na rysunku przedstawione są wyniki pomiarów dla kul o różnych średnicach poruszających się w różnych cieczach.



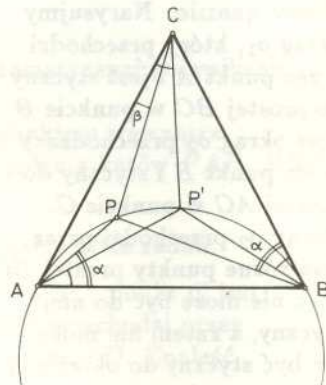
Współczynnik oporu czołowego dla ruchu kulki w zależności od liczby Reynoldsa. Dane układają się na jednej krzywej.

Dane rzeczywiście układają się na jednej krzywej dla  $R$  zmieniającego się o 7 rzędów wielkości. Tego typu krzywa nosi nazwę krzywej skalowania. Znamy ją z wyników pomiarów. Zauważmy, że znalezione prawo skalowania (\*) pozwala wyciągnąć wnioski o ruchu wielkich statków ( $l \rightarrow \infty$ ) z zachowania się małych statków poruszających się z dużymi prędkościami ( $v \rightarrow \infty$ ), gdyż oba graniczne przypadki opisane są tą samą funkcją  $f(R)$ . Ścisłe mówiąc, nie jest to prawda, gdyż dla bardzo dużych prędkości statków należy uwzględnić nowe parametry, na przykład prędkość dźwięku w cieczy, zjawiska termiczne spowodowane tarcem itp. Powyższa obserwacja jest podstawą teorii modelowania, tak ważnej przy projektowaniu statków, samolotów, dużych budowli itp. z użyciem tuneli aerodynamicznych. Zauważmy też, że z przedstawionego przez nas prawa skalowania wynika, że stosunek siły oporu do masy statku maleje ze wzrostem jego rozmiarów liniowych, gdyż

$$\frac{F}{m} \sim \frac{1}{l}.$$

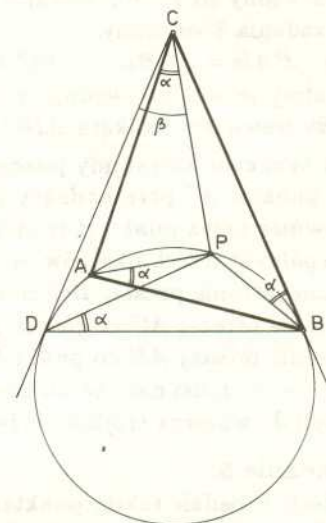
**Zadanie 6.** Niech  $P$  będzie takim punktem wewnątrz trójkąta równoramiennego  $ABC$  ( $AC = BC$ ), że  $\angle PAB = \angle PBC = \alpha > 30^\circ$ . Udowodnić, że  $\beta = \angle PCA < 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Zadanie to jest natychmiastowym wnioskiem z zadania 5. A mianowicie: niech  $P'$  będzie takim punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$ , że  $\angle P'AB = \angle P'BC = \angle P'CA$  (zadanie 4). Wówczas aby  $\alpha > 30^\circ$ , punkt  $P$  musi leżeć na krótszym z łuków  $AP'$  danego okręgu (zadanie 5). A zatem  $\beta = \angle PCA < \angle P'CA \leq 30^\circ$ .



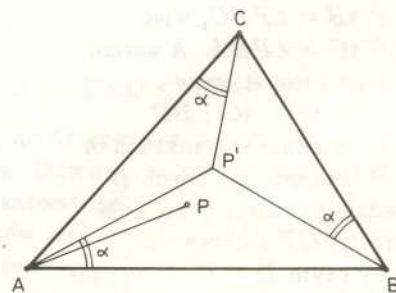
**Zadanie 7.** Niech  $P$  będzie takim punktem wewnątrz dowolnego trójkąta  $ABC$ , że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$ . Dowieść, że  $\alpha \leq 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Opiszmy okrąg na trójkącie  $ABP$ . Jest on styczny do prostej  $BC$  w punkcie  $B$  (zadanie 3). Przez punkt  $C$  poprowadźmy styczną  $CD$  w punkcie  $D$  różnym od  $B$ . Załóżmy, że  $\alpha > 30^\circ$ . Trójkąt  $DBC$  jest równoramienny ( $DC = BC$ ), ponadto  $\alpha = \angle PBC = \angle PAB = \angle PDB$ . A zatem  $\beta = \angle DCP < 30^\circ$  (zadanie 6). Z drugiej zaś strony  $\beta \geq \alpha > 30^\circ$ . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że  $\alpha \leq 30^\circ$ .



W tym momencie zaproponowane na początku **ZADANIE** rozwiązuje się niemal samo. A mianowicie:

Przez  $P'$  oznaczmy taki punkt wewnątrz dowolnego trójkąta  $ABC$ , że  $\angle P'AB = \angle P'BC = \angle P'CA = \alpha \leq 30^\circ$ . A zatem jeśli punkt  $P$  leży wewnątrz (lub na obwodzie) któregoś z trójkątów  $ABP'$ ,  $BCP'$ ,  $CAP'$ , to odpowiednio któryś z kątów  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  jest mniejszy lub równy  $\alpha$ , czyli tym samym mniejszy lub równy  $30^\circ$ .



Ile lat ma Wszechświat? Na to bardzo zasadnicze pytanie najczęstszą odpowiedzią jest, że można to obliczyć znając tempo rozbiegania się galaktyk. Skoro prędkość ucieczki jest wprost proporcjonalna do odległości – a tak wynika z obserwacji – to kiedyś wszystkie galaktyki musiały znajdować się „w jednym punkcie”. Współczynnik proporcjonalności w przytoczonym tu prawie Hubble’a wynosi w przybliżeniu 50 km/s/Mpc, więc wiek Wszechświata, jako odwrotność stałej Hubble’a, wynosi 20 mld lat ( $1 \text{ pc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ). Wynik ten jest jednak mocno niedokładny z kilku powodów. Podana tu wartość stałej Hubble’a dotyczy tylko obserwowanej części Wszechświata i wyznaczona jest na tyle niepewnie, że ostrożniejsi badacze do dziś wolą pisać:  $H = 100 h \text{ km/s/Mpc}$ , gdzie  $\frac{1}{2} \leq h < 1$ . Ponadto Wszechświat z pewnością ekspanduje niejednostajnie, podobnie jak porusza się kamień, który rzucony w górę zwalnia bez względu na to, jak silnie go rzucono. Tę niejednostajność opisuje tzw. parametr deceleracji. Mniejsza o jego formalną definicję, faktem jest, że jest on wyznaczony jeszcze mniej dokładnie niż stała Hubble’a. W rezultacie wypada przyznać, że wiek Wszechświata oceniany jest na 10 do 20 mld lat i że przydałaby się niezależna jego ocena.

Okazuje się, że można takiej oceny dokonać na podstawie analizy jasności białych karłów. Wydaje się rozsądne założenie, że Kosmos jest starszy niż najstarsze gwiazdy, a do takich zalicza się białe karły. Losy samotnych białych karłów (tzn. nie będących składnikami układów podwójnych) są przesądzone. Te gęste gwiazdy nie produkują już energii, pozbywają się jedynie wewnętrznego ciepła zgromadzonego we wcześniejszych fazach życia. Krótko mówiąc – świecą stygnąc i ich jasności muszą stopniowo maleć. Jest to proces bardzo powolny, ale najważniejsze, że można go opisać matematycznie, gdyż budowa i ewolucja białych karłów jest łatwiejsza do teoretycznego prześledzenia niż, na przykład gwiazd ciągu głównego. Jeżeli więc Wszechświat jest odpowiednio młody, to żaden z białych karłów nie powinien jeszcze tak wystygnąć, by stać się niewidocznym – istniałaby wtedy dolna granica ich jasności absolutnych.

Fakt ten został odkryty przez Jamesa Leiberta i jego współpracowników z University of Arizona. Stwierdzili oni, że liczba białych karłów wprawdzie rośnie ze spadkiem jasności absolutnej (tzn. coraz słabszych gwiazd tego typu jest coraz więcej), ale przy jasności absolutnej 16 mag gwałtownie spada. Teoretyczne przewidywania zależności liczby białych karłów od ich jasności nieźle zgadzają się z obserwacjami, są więc powody, by wierzyć w ocenę wieku tych najśłabszych gwiazd – około 9 mld lat.

By na tej podstawie oszacować wiek Wszechświata, trzeba uwzględnić jeszcze inne czynniki. Przede wszystkim: ile czasu ewoluuje gwiazda do stadium białego karła? Jeżeli nasze poglądy na ewolucję gwiazd są trafne, to biały karzeł o jasności absolutnej 16 mag ma masę około 0,8 masy Słońca, a z tego wynika, że jego macierzysta gwiazda miała masę zawartą między dwiema a czterema masami Słońca, gdy jeszcze spalała wodór. Teoria zaś mówi, że gwiazdy o takich masach ewoluują 300 mln lat do stadium białego karła, co należy doliczyć do dziewięciu miliardów.

Na tym nie koniec. Trzeba jeszcze doliczyć czas od samego Wielkiego Wybuchu do powstania pierwszych gwiazd w dysku naszej Galaktyki. Ocena tego jest znowu niepewna, aczkolwiek wszystkie akceptowane modele kosmologiczne skłaniają do przyjęcia tu w przybliżeniu 1 mld lat. Końcowy wynik byłby zatem 10,3 mld lat, co dowodziłoby, że stała Hubble’a wynosi raczej 100 km/s/Mpc, a nie 50, na co zgadza się obecnie chyba większość astronomów.

Autorzy przedstawionych tu w skrócie rozważań twierdzą, że ich błąd oceny wieku Wszechświata jest rzędu  $\pm 2$  mld lat i że może on zostać zredukowany w wyniku dalszych prac. W każdym razie w świetle tych badań i przy stałej Hubble’a wyznaczonej z obserwacji ucieczki galaktyk można by próbować oceniać parametr deceleracji, stąd średnią gęstość Wszechświata, która może silnie zależeć od masy (obecnie nie znanej) neutrin itd. Ciekawe, kiedy te wszystkie parametry ułożą się w naprawdę spójny model Wszechświata?...

Tomaz KWAST

W XIX w. była to bardzo ważna obserwacja pokazująca, że opłacało się budować duże statki parowe do przewozu towarów.

Użycie starannie dobranych zmiennych pozwala więc na przedstawienie wyników doświadczeń w sposób wskazujący bezpośrednio na fizykę badanych zjawisk. Odkrycie prawa skalowania jest często punktem wyjścia do budowy nowej teorii fizycznej. Pod koniec lat sześćdziesiątych J.D. Bjorken wysunął hipotezę, że w rozpraszaniu elektronów na nukleonach odpowiednio zdefiniowane wielkości, zwane funkcjami struktury nukleonu, powinny zależeć jedynie od jednej bezwymiarowej kombinacji dwóch zmiennych wymiarowych (tak zwana hipoteza skalowania Bjorkena).

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych hipoteza skalowania została potwierdzona doświadczalnie. Można by się zapytać znowu: i co z tego? Otóż, można teoretycznie wyprowadzić skalowanie Bjorkena jedynie wówczas, jeśli założy się, że nukleony składają się z punktowych, swobodnych składników – kwarków! W ten sposób hipoteza skalowania przyczyniła się do ugruntowania roli kwarków (wprowadzonych wcześniej jako hipotetyczne obiekty tłumaczące niektóre właściwości cząstek elementarnych) jako rzeczywistych składników materii. W tym sensie kwarki zostały zaobserwowane doświadczalnie.

Analiza wymiarowa i skalowanie jest integralną częścią fizyki od ponad stu lat. Zastosowanie jej metod dwadzieścia lat temu w fizyce jądrowej i cząstek elementarnych spowodowało radykalne zmiany w naszym rozumieniu podstawowych składników materii i przyczyniło się do przyjęcia kwantowej teorii pól jako podstawy do budowy teorii oddziaływań fundamentalnych. Sprawdzajcie więc wymiary!

