Miłość i pierwiastek z minus jedności

Dawno temu ludzie z warstwy, która w Europie Wschodniej zwana jest inteligencją, mieli chyba niesłychanie wiele wolnego czasu. Zastanawiali się nad wieloma zupełnie niepraktycznymi problemami, a wśród nich nad pytaniem, jakim pojęciom przysługuje atrybut istnienia. Zastanawiali się tak głęboko, że niejednokrotnie zaczynali wypowiadać poglądy wręcz patologiczne. I tak np. George Berkeley uważał, iż wszystko, co postrzegamy, złudą jeno być może i nie ma pewności, czy istnieje bez postrzegającego (a było to nie tak dawno temu, bo na początku XVIII wieku). Ale i ci, którzy nie wątpili w istnienie deszczu, gdy ten lał im się na głowę, i parasola, który chronił ich przed zamoczeniem, umieli zadawać sobie i innym pytania o istnienie, które wprawiały w pomieszanie.

Nie próbując śledzić rozwoju filozoficznego sporu spróbujmy odpowiedzieć na pytanie o istnienie miłości, pierwiastka z minus jedności, klasy robotniczej i, powiedzmy, zbioru. Każde z tych pojęć (wymieniłem je w kolejności, w jakiej – chyba – pojawiły się na świecie) ma obfitą literaturę na swój temat. Żadne z nich nie poddaje się weryfikacji eksperymentalnej. Istnienie każdego z nich było zdecydowanie kwestionowane, choć fakt, że się o nich od czasu do czasu mówi, nie jest odbierany jako bredzenie.

Pierwiastek z minus jedności (żeby zająć się czymś matematycznym) powstał z racji rozwiązywania równań stopnia trzeciego. Takie równania mają tę przyjemną cechę, że (jako nieparzystego stopnia) zawsze mają pierwiastek rzeczywisty. Nie zawsze jednak istnieje algorytmiczna droga do tego pierwiastka, przebiegająca w obrębie liczb rzeczywistych (nie istnieje, gdy pierwiastków rzeczywistych jest trzy – nazywa się to *casus irreducibilis*). Droga taka biegnie wtedy opłotkami, które zwą się liczbami zespolonymi, a prawie każda z tych liczb jest blisko z omawianym pierwiastkiem z minus jedności spokrewniona. Cardano, jeden z twórców algorytmu rozwiązywania równań stopnia trzeciego, sytuację opisywał bardzo klarownie: umysł nie jest obowiązany trzymać się ziemi; może on pozwolić sobie na hiperbolę, gdzie (przebywając na niedosiężnych dla profanów wyżynach) rozwikła to, co na ziemi rozwikłane być nie może, a potem (już z wynikiem) na ziemię powróci.

Istnienie liczb zespolonych kwestionowali nawet ci, którzy przyczyniali się do ich rozwoju. Np. Euler w *Algebrze* (1770), która jest podręcznikiem teorii liczb zespolonych, pisze: *Pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych nie są zerem, ani nie są ujemne, ani dodatnie. Stąd wynika, że pierwiastki te nie mogą się znajdować wśród możliwych liczb. W konsekwencji są to niemożliwe liczby. I tak dochodzimy do pojęcia liczb na ogół zwanych urojonymi, albo wyobrażalnymi, dlatego że istnieją one tylko w wyobraźni.* Dla matematyków liczby zespolone (a wśród nich i pierwiastek z minus jedności) zaczęły istnieć **naprawdę** w 1799 roku, kiedy to Gauss (w swojej pracy doktorskiej) udowodnił tzw. podstawowe twierdzenie algebry orzekające, że każdy wielomian o współczynnikach zespolonych ma zespolony pierwiastek – liczby o tak pięknej własności były zbyt pociągające, aby nie istnieć. Później, w latach 30. XIX wieku Hamilton wskazał, jak mówić o liczbach zespolonych tak, by o żadnych pierwiastkach z liczb ujemnych nie wspominać.

Warto zwrócić uwagę, że pytanie o istnienie można sensownie i bez klarownej odpowiedzi odnieść do większości pojęć matematyki. Czy faktycznie istnieje *długość bez szerokości*, czyli linia (mniejsza już o to: prosta czy nie)? A przecież oczywistość jej istnienia jest tak wielka, że nawet filozof zastanowi się chwilę, czy wypada zadać pytanie o istnienie linii np. prostych.

Właśnie, w tej oczywistości mieści się chyba jedyna sensowna odpowiedź na pytanie o istnienie różnych pojęć. Kartezjusz na pytanie o Boga odpowiedział: *Bóg istnieje, bo nie można sobie wyobrazić, by było inaczej.* Później wyobraźnia ludzka stała się istotnie większa i wszystko już wyobrazić sobie było można. I wtedy stanęliśmy przed koniecznością zdecydowania się na opinię Pirandella: *jest tak, jak nam się zdaje.*

A w ten, jakże słuszny sposób, każdy może rozstrzygnąć problem, czy istnieje linia prosta, miłość, pierwiastek z minus jedności, klasa robotnicza, zbiór, Bóg i Bóg wie co jeszcze. Wymaga to jednak czegoś, od czego nawet filozofowie często uciekają – podjęcia na własną odpowiedzialność decyzji jak, mianowicie, nam się zdaje.

Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania M 625. Wstawmy 0 po dowolnej cyfrze dowolnej liczby z pierwszego ciągu (wstawiamy tylko jedno zero). Otrzymamy liczbę z drugiego ciągu. Ta operacja zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między cyframi pierwszego ciągu i zerami drugiego.

Rozwiązanie zadania M 626. Mamy

$$a_{k+10} = a_{k+9} + a_{k+8} = a_{k+8} + a_{k+7} + a_{k+6} + a_{k+7} = a_{k+8} + a_{k+7} + a_{k+6} + a_{k+5} + a_{k+6} = \ldots = a_{k+8} + a_{k+7} + \ldots + a_{k+1} + a_{k+2} = S + a_{k+2},$$

gdzie $S = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+8}$. Stąd otrzymujemy

$$a_{k+9} = a_{k+8} + a_{k+7} < S < S + a_{k+2} = a_{k+10}.$$

Tym samym S nie należy do ciągu Fibonacciego.

Rozwiązanie zadania M 627. Wybierzmy układ współrzędnych o początku w środku symetrii wielościanu W. Niech a będzie takim wektorem przesunięcia, że $W' = W + a$ ma punkt wspólny z W. Biorąc $b \in W \cap W'$ otrzymujemy wniosek, że $b - a \in W$. Ze względu na symetrię W również $a - b \in W$, a ze względu na wypukłość W środek b i $a - b$, czyli $\frac{b + (a-b)}{2} = \frac{a}{2}$, należą do W. Korzystając jeszcze raz z wypukłości, dla dowolnego punktu $c \in W$ mamy

$$d = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \cdot c\right) \in W.$$

Zauważmy, że $c + a \in W'$, ale $3d = c + a$, z czego wynika, że $c + a$ należy do obrazu jednokładnego W (względem początku układu) o skali 3. Objętość tego obrazu jest 27 razy większa od objętości W. Zatem wszystkie obrazy W' wielościanu W w takich przesunięciach, że przecięcie W i W' jest niepuste, mieszczą się w tym obrazie jednokładnym W. Stąd, jeśli $W, W_1, W_2, \ldots, W_n$ mają rozłączne wnętrza, to $n \leq 26$ (bo objętość każdego z tych wielościanów jest taka sama). Liczby 26 nie można zmniejszyć, na co wskazuje przykład z sześcianem.