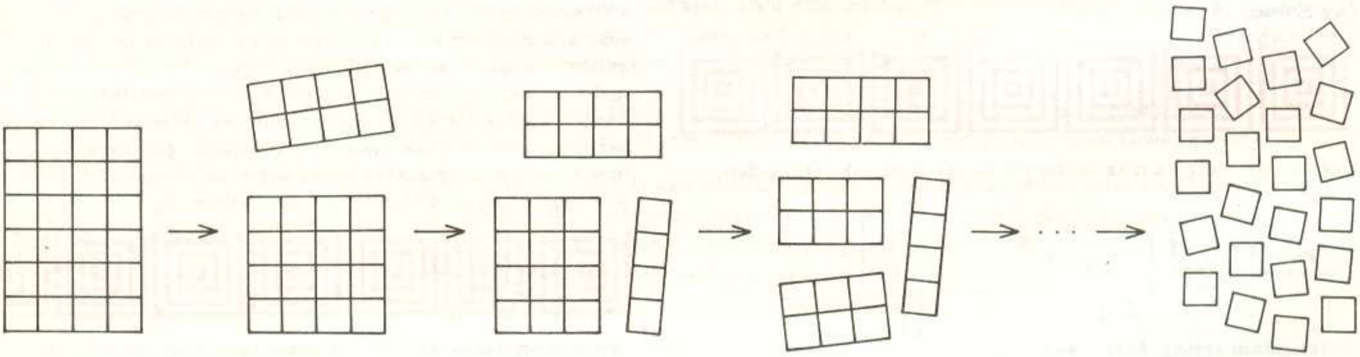
mała delta

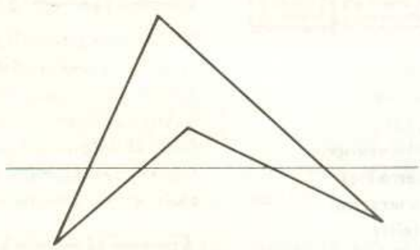
Ciekawe zadania

Zadanie 1. Mamy tabliczkę czekolady 6×4. Jaka jest najmniejsza liczba łamań, których należy dokonać, aby otrzymać pojedyncze kosteczki?



Zadanie 2. Przez $n!$ (czytaj: n silnia) oznaczamy iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$. Wiadomo, że liczba 35! jest równa 10333147966386144929 ☺ 66651337523200000000, gdzie symbolem ☺ została zastąpiona jedna z cyfr. Jaka to cyfra?

Zadanie 3. Jeśli czworokąt jest wklęsły, to istnieje prosta przecinająca wszystkie jego boki. Czy istnieje 1991-kąt o tej własności, że pewna prosta przecina wszystkie jego boki?



Rozwiązania

Zadanie 1. Zauważmy, że przy każdym łamaniu liczba kawałków zwiększa się o 1. A że w końcu dochodzimy do 24 kawałków, więc zawsze, niezależnie od tego, jak łamiemy, musimy dokonać dokładnie 23 łamań.

Zadanie 2. Liczba 35! jest podzielna przez 9. Stąd suma jej cyfr, czyli liczba 138+ ☺ też jest podzielna przez 9, ale $138 = 15 \cdot 9 + 3$, więc ☺ $= 6$.

Zadanie 3. Jeżeli pewna prosta przecina wszystkie boki wielokąta, to każdy bok ma oba końce po przeciwnych stronach tej prostej. Wobec tego po obu stronach prostej jest tyle samo wierzchołków wielokąta, stąd zaś wynika, że wielokąt ma parzystą liczbę wierzchołków, a więc nie może to być 1991-kąt.

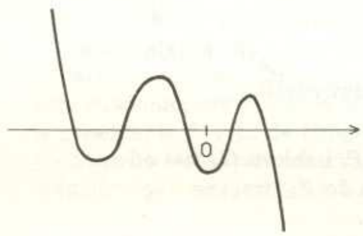
Przesuwanie równania

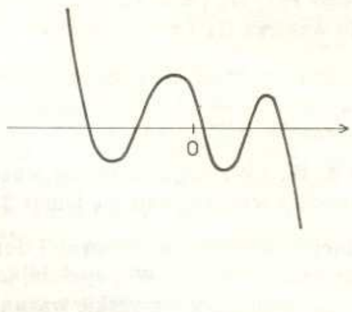
Oglądając wzory na rozwiązanie równań stopnia 3 i 4 spostrzegamy, że są one podane dla przypadku, gdy współczynnik przy najwyższej potędze jest 1, a przy następnej – 0. Pierwsza sprawa jest oczywista – możemy zawsze wszystkie współczynniki równania algebraicznego podzielić przez współczynnik przy najwyższej potędze otrzymując równanie równoważne i mające pierwszy współczynnik równy 1 (równoważne, to znaczy o tych samych pierwiastkach).

Aby uzyskać kolejny współczynnik równy 0, posługujemy się właśnie przesunięciem – zamianą zmiennych postaci $x+p$. Liczba p dla równania

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

powinna być równa $-a_{n-1}/n$; wówczas przy zamianie $x \to x+p$ potęga $n-1$ nie pojawi się (co łatwo uzasadnić). Warto tu zwrócić uwagę, że naszą operację można geometrycznie opisać tak: przesuwamy oś iksów względem wykresu wielomianu tak, aby zero tej osi było średnią arytmetyczną (lub, co na jedno wychodzi – środkiem ciężkości) pierwiastków wielomianu (także zespolonych!).





Jeśli jest to wykres wielomianu stopnia 5, to z lewej jest $a_4 \neq 0$, a z prawej $a_4 = 0$.

Równanie $x^3+px+q=0$ ma pierwiastek $x_0 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}$. Pozostałe pierwiastki znajduje się po podzieleniu wielomianu przez $(x-x_0)$.

Równanie $x^4+px^2+qx+r=0$ rozwiązuje się tak: rozwiązujemy pomocnicze równanie

$$8y\left(y^2+py-r+\frac{p^2}{4}\right)-q^2=0$$

otrzymując pierwiastek y_0, a następnie równanie

$$(x^2+\frac{p}{2}+y_0)^2 = 2y_0\left(x-\frac{q}{4y_0}\right)^2,$$

które ma wtedy te same pierwiastki, co równanie wyjściowe.

Ciekawe są tu dwa spostrzeżenia: po pierwsze – ów środek ciężkości możemy znaleźć nie znając samych pierwiastków (w istocie wynika to ze wzorów Vieté'a), po drugie – tak usytuowane równanie daje się łatwiej rozwiązać.

Likwidując współczynnik przy pierwszej potędze w równaniu $x^2+px+q=0$ za pomocą przesunięcia otrzymujemy równanie

$$x^2+r=0,$$

które ma pierwiastki $\pm\sqrt{-r}$. Stąd pierwotne równanie ma pierwiastki $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-r}$. Tak więc szkolna metoda rozwiązywania równań kwadratowych w istocie polega na zręcznym przesunięciu.

Można więc zadać pytanie, czy nie dałoby się tak zręcznie przesunąć równania, by znikał nie akurat współczynnik przy potędze $n-1$, lecz jakiś inny. I jak to zrobić? Okazuje się, że na ogół nie można dobrać takiego przesunięcia, by dowolnie wybrany współczynnik zniknął. Już dla równania

$$x^3+x^2+x+1=0$$

nie istnieje przesunięcie likwidujące współczynnik przy pierwszej potędze. A np. współczynnik a_0 można zawsze zlikwidować, tyle że aby to zrobić (tj. znaleźć liczbę p), trzeba znać jakiś pierwiastek naszego równania, a więc takie przesunięcie nie nadaje się jako pomoc przy rozwiązywaniu równań. A może ktoś z Czytelników umiałby zbudować ogólną teorię likwidacji współczynników przez przesunięcie?

Małą Deltę przygotowali Piotr HAJŁASZ i Marek KORDOS