i przyspieszenia ziemskiego g. Zapytajmy się o okres wahań wahadła. Wielkość o wymiarze czasu można dostać tylko na jeden sposób

$$T \sim \sqrt{\frac{l}{g}},$$

a więc okres nie może zależeć od masy wahadła, gdyż nie ma jak pozbyć się kilogramów! Oczywiście, analiza wymiarowa nie pozwala na znalezienie bezwymiarowego współczynnika proporcjonalności w powyższym wzorze. Można go znaleźć wykonując, na przykład, pomiar okresu wahań dla wahadła o zadanej długości w miejscu o znanej wartości g. W ogólności zależy on od początkowego kąta odchylenia wahadła (też wielkość bezwymiarowa, a więc nie poddająca się analizie wymiarowej). Dla małych wahań wahadła współczynnik ten wynosi 2π.

Drugi przykład, który rozpatrzymy. jest bardziej skomplikowany. Rozważmy problem oporu cieczy lepkiej działającej na płynący statek. Jakie wielkości fizyczne mogą mieć wpływ na siłę oporu? Intuicja (doświadczenie) podpowiada nam, że siła oporu może zależeć od wielu czynników. Spróbujmy ograniczyć się do najważniejszych (budujemy więc model matematyczny): siła oporu F (kg·m/s^2), prędkość statku v (m/s), rozmiary statku l (m), współczynnik lepkości cieczy μ (kg/(m·s)), gęstość cieczy ρ (kg/m^3), przyspieszenie ziemskie g (m/s^2). W nawiasach podaliśmy wymiary (jednostki). W naszych rozważaniach pominiemy napięcie powierzchniowe cieczy, prędkość wiatru, wielkość fal na powierzchni cieczy itp. Oznacza to, że otrzymane wyniki nie będą stosować się do ruchu owadów ślizgających się po powierzchni cieczy, żaglówek, ruchu statków w czasie silnych sztormów itp. Pomijamy też detale budowy statku wprowadzając tylko jeden parametr charakteryzujący jego rozmiary, to znaczy naszym statkiem będzie kula o promieniu l.

Ruch cieczy lepkiej opisywany jest równaniami Naviera-Stokesa, których w ogólnym przypadku nie potrafimy rozwiązać. Zastosujmy więc analizę wymiarową. Mamy do dyspozycji sześć wielkości: F, l, ρ, μ, g i v. Może warto wytłumaczyć, dlaczego nie rozpatrujemy masy statku jako niezależnej wielkości fizycznej. Otóż, zgodnie z prawem Archimedesa masa statku jest równa masie wypartej cieczy, a to z kolei jest rzędu ρl^3.

Krok po kroku

Waldemar POMPE

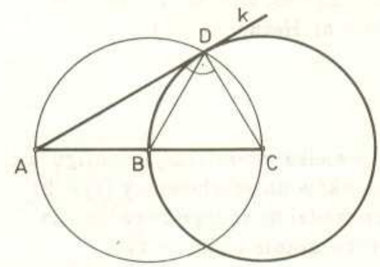
Na 32 Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej pojawiło się następujące

ZADANIE. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC. Wykazać, że co najmniej jeden z kątów PAB, PBC, PCA jest mniejszy lub równy 30°.

Zanim udowodnimy to twierdzenie, rozwiążmy kilka zadań.

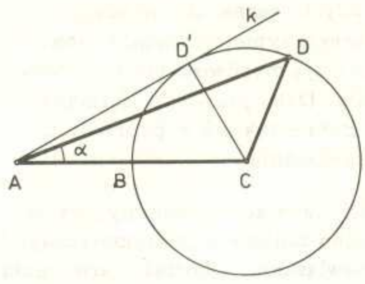
Zadanie 1. Punkt B jest środkiem odcinka AC, punkt C jest środkiem okręgu o promieniu BC. Prosta k przechodzi przez punkt A i jest styczna do tego okręgu w punkcie D. Znaleźć rozwartość kąta DAC.
(Zadanie to pochodzi z egzaminu wstępnego do klasy matematycznej IX LO im. K. Hoffmanowej w Warszawie z 1989 r.)

Rozwiązanie. Narysujmy okrąg o o środku w punkcie B i promieniu BC. Ponieważ trójkąt ADC jest prostokątny, a $AB = BC$, więc okrąg o przechodzi przez punkty A, C, D. A zatem $BD = BC = CD$, skąd wynika, że trójkąt BCD jest równoboczny. A więc $\angle DAC = 90° - \angle BCD = 90° - 60° = 30°$.



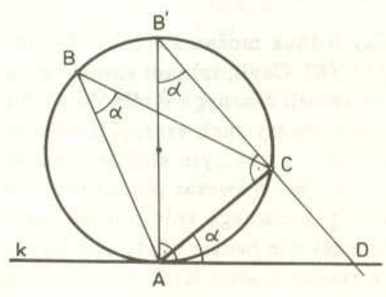
Zadanie 2. Dany jest taki trójkąt ACD, że $AC = 2CD$. Wykazać, że $\angle CAD \leq 30°$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez α kąt DAC. Narysujmy okrąg o o środku w punkcie C i promieniu CD. Niech B będzie punktem przecięcia odcinka AC z okręgiem o. Ponieważ $AC = 2CD$, więc $AB = BC$. Niech AD' będzie styczną do okręgu o, gdzie D' jest takim punktem okręgu o, że półproste AD' i AD leżą po tej samej stronie prostej AC.
Wówczas na mocy zadania 1 mamy $\alpha = \angle CAD \leq \angle CAD' = 30°$.



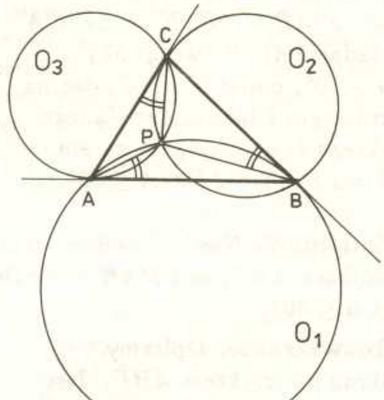
Zadanie 3. Niech k będzie styczną do okręgu o w punkcie A, AC zaś dowolną cięciwą tego okręgu. Dowieść, że kąt ostry między styczną k a cięciwą AC jest równy kątowi ABC, gdzie B jest dowolnym punktem większego z łuków AC okręgu o. (W przypadku, gdy AC jest średnicą okręgu o, nie ma czego dowodzić.)

Rozwiązanie. Niech AB' będzie średnicą okręgu o. Prosta $B'C$ przecina styczną k w punkcie D. Trójkąty ADC i $B'DA$ są podobne ($\angle ADC = \angle ADB'$, $\angle B'AD = \angle ACD$), więc $\angle CAD = \angle AB'C = \angle ABC$.



Zadanie 4. Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta ABC istnieje taki punkt P, że $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$.

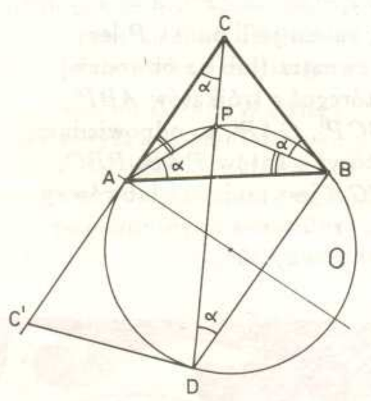
Rozwiązanie. Narysujmy okrąg o_1, który przechodzi przez punkt A i jest styczny do prostej BC w punkcie B oraz okrąg o_2 przechodzący przez punkt B i styczny do prostej AC w punkcie C. Okrąg o_2 przechodzi przez dwa różne punkty prostej BC, więc nie może być do niej styczny, a zatem nie może też być styczny do okręgu o_1. Tak więc o_1 i o_2 oprócz wspólnego punktu B mają jeszcze jeden wspólny punkt. Nazwijmy go P. Korzystając z zadania 3 wnosimy, że $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Należy jeszcze udowodnić, że P leży wewnątrz trójkąta ABC.



W tym celu narysujmy jeszcze okrąg o_3 styczny do prostej AB w punkcie A i przechodzący przez punkt C. Okrąg o_3 przechodzi również przez punkt P (zadanie 3). Zatem P jest punktem wspólnym trzech okręgów o_1, o_2, o_3. Okrąg o_1 leży w całości po tej samej stronie prostej BC co punkt A, o_2 leży w całości po tej samej stronie prostej AC co punkt B, o_3 zaś leży w całości po tej samej stronie prostej AB co punkt C. Tak więc punkt wspólny okręgów o_1, o_2, o_3 musi należeć do części wspólnej tych trzech półpłaszczyzn, czyli do wnętrza trójkąta ABC.

Zadanie 5.
Niech P będzie takim punktem wewnątrz trójkąta równoramiennego ABC ($AC = BC$), że $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$. Wykazać, że $\alpha \leq 30°$.

Rozwiązanie. Opiszmy okrąg o na trójkącie ABP. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny oraz $\angle PAB = \angle PBC$, więc $\angle PAC = \angle PBA$. A zatem okrąg o jest styczny do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B (zadanie 3). Niech D będzie punktem przecięcia prostej CP z okręgiem o, przy czym $D \neq P$. Wówczas $\angle ACP = \angle PAB = \angle PDB$. Tak więc prosta AC jest równoległa do prostej BD. Niech C' będzie takim punktem prostej AC, że $AC = AC'$ i $C \neq C'$.



Symetralna odcinka CC' przechodzi przez punkt A, jest średnicą okręgu o oraz symetralną odcinka BD, z czego wynika, że $AC' = C'D$. A zatem trójkąt CDC' jest takim trójkątem, w którym $2C'D = CC'$, skąd na mocy zadania 2 $\alpha = \angle PCA = \angle C'CD \leq 30°$.

Zauważmy, że mamy jedynie trzy podstawowe jednostki: kilogram, metr i sekundę, w których mierzy się sześć wielkości. A więc jedynie trzy bezwymiarowe ich kombinacje mogą być niezależne. Wybierzmy je w następujący sposób:

$$C_D = \frac{F}{\rho v^2 l^2},$$

$$R = \frac{vl\rho}{\mu},$$

$$N_F = \frac{v^2}{lg}.$$

Oczywiście, dowolna ich kombinacja też jest bezwymiarowa, ale wybraliśmy je tak, gdyż każda z nich wiąże się z inną cechą badanego problemu. Stała Reynoldsa R związana jest z lepkością cieczy μ, stała Froude'a N_F wiąże siły bezwładności ($\sim mv^2/l$) z siłami ciężkości ($\sim mg$) w przepływie cieczy. Charakteryzuje, na przykład, fale i zawirowania na powierzchni cieczy spowodowane ruchem statku. W końcu współczynnik oporu czołowego C_D nie zależy ani od μ, ani od g.

Analiza wymiarowa mówi nam, że bezwymiarowy współczynnik oporu czołowego C_D musi być pewną funkcją dwóch pozostałych bezwymiarowych wielkości, to znaczy

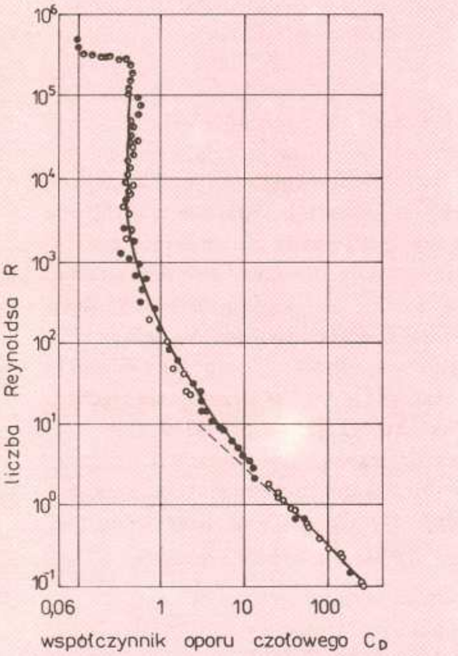
$$C_D = f(R, N_F).$$

Załóżmy w końcu, że efekt fal tworzonych na powierzchni cieczy przez płynący statek jest zaniedbywalny (krańcowym przykładem będzie okręt podwodny). Wówczas stała g, odpowiedzialna za fale na wodzie, nie powinna wejść do rozwiązania, a więc stała Froude'a w powyższym wzorze może być pominięta. W języku wyjściowych wielkości wymiarowych dostajemy więc ostateczny wzór na siłę oporu

$$(*) \qquad F = \rho v^2 l^2 f(vl\rho/\mu).$$

W tym momencie można powiedzieć: no dobrze, ale przecież nie znamy funkcji f, więc jaki jest pożytek z otrzymanego wyniku? Żeby zrozumieć korzyść z naszych rozważań, zauważmy, że jeśli odłożyć na wykresie wartość siły F w zależności od długości l, to otrzymamy wiele różnych krzywych dla różnych cieczy, z których nic ciekawego nie da się odczytać. Jeśli natomiast odłożyć C_D w zależności od R, to wszystkie punkty powinny ułożyć się na jednej krzywej dla różnych cieczy i różnych rozmiarów statków!

Na rysunku przedstawione są wyniki pomiarów dla kul o różnych średnicach poruszających się w różnych cieczach.

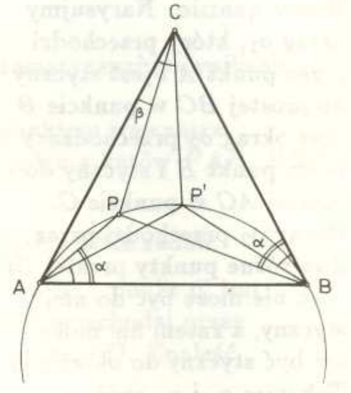


Współczynnik oporu czołowego dla ruchu kulki w zależności od liczby Reynoldsa. Dane układają się na jednej krzywej.

Dane rzeczywiście układają się na jednej krzywej dla R zmieniającego się o 7 rzędów wielkości. Tego typu krzywa nosi nazwę krzywej skalowania. Znamy ją z wyników pomiarów. Zauważmy, że znalezione prawo skalowania (*) pozwala wyciągnąć wnioski o ruchu wielkich statków ($l \to \infty$) z zachowania się małych statków poruszających się z dużymi prędkościami ($v \to \infty$), gdyż oba graniczne przypadki opisane są tą samą funkcją $f(R)$. Ściśle mówiąc, nie jest to prawda, gdyż dla bardzo dużych prędkości statków należy uwzględnić nowe parametry, na przykład prędkość dźwięku w cieczy, zjawiska termiczne spowodowane tarciem itp. Powyższa obserwacja jest podstawą teorii modelowania, tak ważnej przy projektowaniu statków, samolotów, dużych budowli itp. z użyciem tuneli aerodynamicznych. Zauważmy też, że z przedstawionego przez nas prawa skalowania wynika, że stosunek siły oporu do masy statku maleje ze wzrostem jego rozmiarów liniowych, gdyż

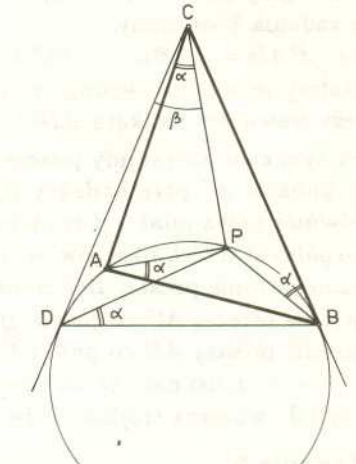
$$\frac{F}{m} \sim \frac{1}{l}.$$

Zadanie 6. Niech P będzie takim punktem wewnątrz trójkąta równoramiennego ABC ($AC = BC$), że $\angle PAB = \angle PBC = \alpha > 30°$. Udowodnić, że $\beta = \angle PCA < 30°$.



Rozwiązanie. Zadanie to jest natychmiastowym wnioskiem z zadania 5. A mianowicie: niech P' będzie takim punktem wewnątrz trójkąta ABC, że $\angle P'AB = \angle P'BC = \angle P'CA$ (zadanie 4). Wówczas aby $\alpha > 30°$, punkt P musi leżeć na krótszym z łuków AP' danego okręgu (zadanie 5). A zatem $\beta = \angle PCA < \angle P'CA \leq 30°$.

Zadanie 7. Niech P będzie takim punktem wewnątrz dowolnego trójkąta ABC, że $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$. Dowieść, że $\alpha \leq 30°$.



Rozwiązanie. Opiszmy okrąg na trójkącie ABP. Jest on styczny do prostej BC w punkcie B (zadanie 3). Przez punkt C poprowadźmy styczną CD w punkcie D różnym od B. Załóżmy, że $\alpha > 30°$. Trójkąt DBC jest równoramienny ($DC = BC$), ponadto $\alpha = \angle PBC = \angle PAB = \angle PDB$. A zatem $\beta = \angle DCP < 30°$ (zadanie 6). Z drugiej zaś strony $\beta \geq \alpha > 30°$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\alpha \leq 30°$.

W tym momencie zaproponowane na początku **ZADANIE** rozwiązuje się nieomal samo. A mianowicie:

Przez P' oznaczmy taki punkt wewnątrz dowolnego trójkąta ABC, że $\angle P'AB = \angle P'BC = \angle P'CA = \alpha \leq 30°$. A zatem jeśli punkt P leży wewnątrz (lub na obwodzie) któregoś z trójkątów ABP', BCP', CAP', to odpowiednio któryś z kątów PAB, PBC, PCA jest mniejszy lub równy α, czyli tym samym mniejszy lub równy $30°$.