Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 219 (WT=3,52) i 220 (WT=1,67)
z numeru 4/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	42,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 237, 238

Redaguje Marcin E. KUCZMA

237. Wyznaczyć wszystkie czwórki dodatnich liczb całkowitych (x, y, u, v) spełniające równanie $x^{u+v} + y = x^u y^v$.

238. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu (a_n) danego wzorem rekurencyjnym: $a_0 = 44$, $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$ dla $n \geq 1$.

Zadanie 238 zaproponował pan Dariusz Laskowski z Troszyna (woj. szczecińskie).

Rozwiązania zadań z numeru 11/1991

Przypominamy treść zadań:

229. Dany jest czworościan $OABC$ oraz trójkąt KLM o wierzchołkach $K \in OA$, $L \in OB$, $M \in OC$. Dowieść, że jeżeli na każdym z czworokątów $ABLK$ i $ACMK$ można opisać okrąg, to również na czworokącie $BCML$ można opisać okrąg.

230. Dla funkcji ciągłej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ rozważamy warunki:
(1) Istnieją różne liczby a, b, c, takie że $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$.
(2) Istnieją różne liczby t, u, v, w, takie że $f(t) = u$, $f(u) = v$, $f(v) = w$, $f(w) = t$.
Udowodnić, że (1) $\Rightarrow$ (2) oraz dać przykład pokazujący, że (2) $\not\Rightarrow$ (1).

229. Na czworościanie $KABC$ opisujemy sferę. Przecina ona płaszczyzny OAB i OAC wzdłuż okręgów opisanych na trójkątach KAB i KAC, zawierających (odpowiednio) punkty L i M. Współpłaszczyznowe punkty B, C, M, L leżą na rozważanej sferze, a więc leżą na wspólnym okręgu.

230. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2). Weźmy pod uwagę funkcje $g(x) = f(f(x))$ i $h(x) = g(g(x))$. Oczywiście, $g(a) = c$, $g(b) = a$, $g(c) = b$. Bez straty ogólności można przyjąć, że a jest najmniejszą z liczb a, b, c.

Przypadek I. $a < b < c$. Oznaczmy: $\varphi(x) = g(x) - x$, $\psi(x) = h(x) - x$. Niech d będzie najmniejszą liczbą w przedziale $(a; b)$, taką że $\varphi(d) = 0$ (taka liczba istnieje, bo $\varphi(a) = c - a > 0$, $\varphi(b) = a - b < 0$). Dalej, niech e będzie najmniejszą liczbą w przedziale $(a; d)$, dla której $g(e) = b$ (istnieje, bo $g(a) = c > b$, $g(d) = d < b$). Ponieważ $\psi(a) = g(g(a)) - a = b - a > 0$, $\psi(e) = g(g(e)) - e = a - e < 0$, znajdujemy w przedziale $(a; e)$ taką liczbę t, że $\psi(t) = 0$. Z określenia d wynika, że $\varphi(t) \neq 0$. A zatem $h(t) = t \neq g(t)$. Określamy: $u = f(t)$, $v = f(u) = g(t)$, $w = f(v)$. Wówczas $f(w) = g(v) = h(t) = t$; tak więc czwórka liczb (t, u, v, w) spełnia wymagane równości. Liczby t i v są różne ($v = g(t) \neq t$). Stąd łatwo wynika, że t, u, v, w są czterema różnymi liczbami.

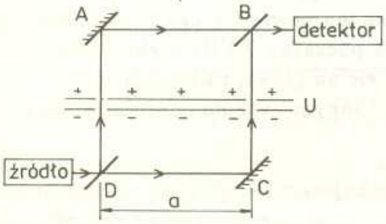
Przypadek II. $a < c < b$. Rozumowanie jest podobne: określamy φ i ψ, jak w przypadku I; określamy d jako największą liczbę w przedziale $(c; b)$, dla której $\varphi(d) = 0$, oraz określamy e jako największą liczbę w przedziale $(d; b)$, dla której $g(e) = c$. W przedziale $(e; b)$ znajdujemy taką liczbę t, że $\psi(t) = 0$ i z określenia d wnioskujemy, że $\varphi(t) \neq 0$. Dokończenie rozumowania, jak w przypadku I.

Przykład pokazujący, że (2) $\not\Rightarrow$ (1). Funkcja ciągła $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \leq 1/\sqrt{2} \\ -1/x & \text{dla } x \geq 1/\sqrt{2} \end{cases}$ ma tę własność, że $f(x) < 0$ dla $x > 0$ oraz $f(x) > 0$ dla $x < 0$. Nie istnieje więc trójka różnych liczb a, b, c spełniająca warunki wymienione w (1). Natomiast warunek (2) jest spełniony na przykład dla czwórki $(t, u, v, w) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Zadania z fizyki nr 135, 136

Redaguje Jerzy B. BROJAN

135. Elektrony mają w mechanice kwantowej własności falowe i mogą ulegać interferencji. Rysunek przedstawia schemat takiego interferometru. Występują w nim zwierciadła całkowicie odbijające A i C (tę rolę mogą pełnić odpowiednie kryształy) i zwierciadła półprzepuszczalne B i D. Wiązka nierelatywistycznych (niezbyt szybkich) elektronów o energii E pada na zwierciadło D, skąd część wiązki biegnie dalej drogą DAB, a część drogą DCB. Na odcinkach pionowych energia kinetyczna elektronów zmienia się w wyniku przejścia do obszaru o innym potencjale. Za zwierciadłem B rozdzielone wiązki nakładają się, a obraz interferencyjny jest rejestrowany przez detektor. O ile prążków przesunie się obraz interferencyjny, gdy różnicę potencjałów zwiększymy od zera do U?



136. Gdy temperatura powietrza atmosferycznego szybko maleje w miarę wzrostu wysokości, występuje intensywna konwekcja (pionowe ruchy mas powietrza), natomiast gdy temperatura maleje powoli lub rośnie, konwekcja nie występuje. Wyjaśnić przyczynę tej zależności i obliczyć minimalny spadek temperatury suchego powietrza przy wzroście wysokości o 100 m, dla którego jeszcze występuje konwekcja.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 121 (WT=2,20) i 122 (WT=1,15) z numeru 8/1991

Adam Sikorski	– Lublin	36,71
Aleksander Borowski	– Aleksandrów K.	17,33
Tomasz Wietecha	– Tarnów	12,12

Niestety, liga traci uczestników: w tej serii rozwiązania przysłali tylko pan Sikorski i pan Wietecha.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1991

Przypominamy treść zadań:

127. Mamy 70 jednakowych ogniw o oporze wewnętrznym 1 Ω. Jak je należy połączyć, aby przez dołączony do baterii opornik R popłynął jak największy prąd? Rozważyć dwa przypadki:
a) $R = 1\ \Omega$,
b) $R = 2\ \Omega$.

128. Ogrzewamy wodę od temperatury T_0 do T na palniku gazowym lub grzejniku elektrycznym. Upływ ciepła z naczynia do otoczenia na jednostkę czasu wynosi P_u (zakładamy dla uproszczenia, że jest stały). Sprawność grzejnika, tzn. stosunek ciepła przekazanego naczyniu do ciepła wydzielonego przez grzejnik jest funkcją mocy P grzejnika

$$W(P) = a - bP\,,$$

gdzie a, b – dane stałe dodatnie. Jak należy wybrać moc grzejnika, aby zużyć najmniejszą ilość energii?

127. Autor otrzymał w przypadku a) maksymalną wartość prądu $I = 4,1739$ (w odpowiednich jednostkach, wynikających z przyjęcia jednostkowej siły elektromotorycznej ogniwa) dla baterii składającej się z dwóch zespołów połączonych szeregowo: pierwszy z dziewięciu połączonych równolegle zestawów po sześć ogniw szeregowo i drugi z ośmiu połączonych równolegle zestawów po dwa ogniwa szeregowo. Identyczna wartość prądu wystąpi dla połączonych równolegle sześciu zestawów po dziewięć ogniw szeregowo i dwóch zestawów po osiem ogniw szeregowo. W przypadku b) autor otrzymał prąd $I = 2,955$ dla połączonych równolegle czterech zestawów po dwanaście ogniw szeregowo i dwóch zestawów po jedenaście ogniw szeregowo.

Wskazówką, jak szukać optymalnego obwodu, jest potraktowanie liczby połączeń równoległych x i szeregowych y jako zmiennych ciągłych, tak że bateria ma siłę elektromotoryczną y i opór wewnętrzny $\frac{y}{x}R_w$ (gdzie R_w – opór wewnętrzny pojedynczego ogniwa). Prąd jest zatem równy

$$I = \frac{y}{R + \frac{y}{x}R_w}\,,$$

a jego maksymalną wartość przy warunku $xy = N = \text{const}$ można znaleźć przez różniczkowanie. Otrzymuje się $x = \sqrt{\frac{NR_w}{R}}$, $y = \sqrt{\frac{NR}{R_w}}$. Nie będą to jednak na ogół liczby całkowite, więc nie obejdzie się bez „kombinowania".

128. Oznaczmy czas ogrzewania przez t. W ciągu tego czasu dopływ ciepła z grzejnika do naczynia jest równy $PW(P)t$, odpływ zaś $P_u t$. Dopływ netto $[PW(P) - P_u]t$ przyrównujemy do wyrażenia $\pi\Delta T$, gdzie $\Delta T = T - T_0$ – przyrost temperatury, a π – pojemność cieplna naczynia wraz z zawartością, tzn. $\pi = m_{\text{wody}} \cdot c_{\text{wody}} + m_{\text{naczynia}} \cdot c_{\text{naczynia}}$. Stąd wynika równanie

$$[PW(P) - P_u]t = \pi\Delta T\,.$$

Zużycie energii jest dane wyrażeniem

$$E = Pt = \frac{\pi P \Delta T}{PW(P) - P_u}\,.$$

Szukając minimum ze wzgledu na P otrzymujemy równanie

$$P_u = -P^2 W'(P) = bP^2\,,$$

którego rozwiązaniem jest $P = \sqrt{P_u/b}$. Wynik ten można bez trudu uogólnić na przypadek, gdy upływ ciepła P_u zmienia się zależnie od temperatury.