27 zbiorów wypukłych bez środka symetrii

Marcin KASPERSKI

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1991 roku.

Przypomnijmy jedno z zadań zeszłorocznej Olimpiady Matematycznej.
Znaleźć największą liczbę naturalną n o tej własności, że istnieje $(n+1)$ takich wielościanów wypukłych $W_0, W_1, \ldots, W_n$, że
(1) W_k jest obrazem W_0 przy pewnym przesunięciu (dla $k = 1, 2, \ldots, n$).
(2) Jeśli $k \neq l$, to W_k i W_l mają rozłączne wnętrza.
(3) W_k i W_0 mają punkt wspólny dla $k = 1, 2, \ldots, n$.
(4) W_0 ma środek symetrii.

Rozwiązanie tego zadania znajduje się w tym numerze *Delty* (str. 16). Okazuje się, że $n = 26$. Przykładem takiej sytuacji jest „Kostka Rubika".

Zauważmy, że rozwiązanie przenosi się bez zmian na przypadek, gdy $W_0, W_1, \ldots, W_n$ są dowolnymi, ograniczonymi, domkniętymi bryłami wypukłymi o niepustych wnętrzach.

Celem mojej pracy jest dowód faktu, że mimo odrzucenia warunku (4), nadal mamy $n = 26$. Zanim przejdziemy do dowodu, podamy dwa lematy. Ich dowody pomijamy. Niech $\vec{\beta}$ będzie wektorem. Przez $T_{\vec{\beta}}$ będziemy oznaczali przesunięcie o wektor $\vec{\beta}$.

Lemat 1. Niech W będzie ograniczoną bryłą wypukłą o niepustym wnętrzu, $\vec{\alpha}$ dowolnym wektorem długości 1. Wówczas istnieje takie $p > 0$, że
(a) $|x| > p \Rightarrow W$ i $T_{x\vec{\alpha}}(W)$ nie mają punktów wspólnych.
(b) $|x| < p \Rightarrow W$ i $T_{x\vec{\alpha}}(W)$ mają wspólne punkty wewnętrzne.
(c) $|x| = p \Rightarrow W$ i $T_{x\vec{\alpha}}(W)$ mają punkty wspólne, ale wnętrza mają rozłączne.

Lemat 2. Niech A i B będą ograniczonymi bryłami wypukłymi o środkach symetrii P_A i P_B, $B = T_{\overrightarrow{P_A P_B}}(A)$, M – środek $\overrightarrow{P_A P_B}$. Wówczas
(A) A i B mają punkt wspólny $\iff M \in A$ i $M \in B$.
(B) A i B mają wspólny punkt wewnętrzny $\iff M$ jest takim punktem.

Ponieważ dowód naszego twierdzenia jest bardzo długi, więc go tylko naszkicujemy pokazując główne kroki w dowodzie.

Niech $W_0, W_1, \ldots, W_n$ będą ograniczonymi i domkniętymi bryłami wypukłymi o niepustych wnętrzach, spełniającymi warunki (1) – (3). Niech P_0 będzie dowolnym punktem przestrzeni. Punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$ niech będą takie, że $W_i = T_{\overrightarrow{P_0 P_i}}(W_0)$ (ich istnienie wynika z (1)). Oznaczmy przez G_i zbiór takich punktów X, że W_i ma punkt wspólny z $T_{\overrightarrow{P_i X}}(W_i)$, a przez F_i zbiór takich X-ów, że W_i i $T_{\overrightarrow{P_i X}}(W_i)$ mają punkt wspólny, ale rozłączne wnętrza. A oto główne kroki w dowodzie:
1) $G_i = T_{\overrightarrow{P_0 P_i}}(G_0)$, $F_i = T_{\overrightarrow{P_0 P_i}}(F_0)$.
2) Częścią wspólną każdej prostej przechodzącej przez P_i i zbioru G_i jest odcinek niezerowej długości o środku w P_i i końcach należących do F_i (wnętrze tego odcinka nie zawiera punktów z F_i). Krok 2) wynika z lematu 1.
3) G_i i F_i są środkowo symetryczne. Ich wspólnym środkiem symetrii jest P_i.
4) G_i jest bryłą wypukłą, a F_i jej brzegiem. (Korzystamy tu z wypukłości W_i.)
5) W_k ma punkt wspólny z $W_l \iff P_l \in G_k$ ($\iff P_k \in G_l$). W_k ma punkt wspólny z wnętrzem $W_l \iff P_l$ należy do wnętrza G_k ($\iff P_k$ należy do wnętrza G_l).

Niech M_i będzie jednokładnym obrazem bryły G_i przy jednokładności o środku P_i i skali 1/2. Wiemy już, że M_i są ograniczonymi i domkniętymi bryłami wypukłymi mającymi środek symetrii w P_i oraz $M_i = T_{\overrightarrow{P_0 P_i}}(M_0)$.
6) $W_i \cap W_j \neq \emptyset \iff M_i \cap M_j \neq \emptyset$. W_i i W_j mają rozłączne wnętrza $\iff$ M_i i M_j mają rozłączne wnętrza. (W dowodzie wykorzystuje się lemat 2.)

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnego układu ograniczonych i domkniętych brył wypukłych o niepustych wnętrzach: $W_0, \ldots, W_n$, spełniających warunki (1) – (3) istnieją bryły $M_0, \ldots, M_n$ spełniające wszystkie warunki nałożone na W_i, a ponadto (4). A więc sprowadziliśmy problem do poprzedniego – znacznie prostszego – zadania, z którego rozwiązania wynika, że $n = 26$.

Na koniec zauważmy, że warunek wypukłości W_0 też nie wydaje się konieczny (prawdopodobnie wystarczy spójność). Drugim ciekawym problemem związanym z moją pracą byłoby rozstrzygnięcie, jakie bryły dają $n = 26$ (czy tylko równoległościany?) i dokładniejsze oszacowanie liczby n dla różnych klas wielościanów – chociażby dla czworościanów.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje Andrzej HENNEL

WĘGLOWA PIŁKA FUTBOLOWA

Natura bardzo lubi płatać naukowcom figle. Ostatnim takim przypadkiem jest odkrycie nowej klasy niezwykle symetrycznych i pustych w środku cząsteczek węgla zwanych fullerenami. Nazwa ta pochodzi od nazwiska amerykańskiego architekta Richarda Buckminstera Fullera (1895–1983), którego ażurowe konstrukcje kopułowe (jak na przykład pawilon USA na EXPO 67) weszły już do historii architektury. Przed kilku laty okazało się, że w odpowiednich warunkach termicznych przy laserowym odparowywaniu grafitu w atmosferze helu powstają cząsteczki węgla przypominające owe kopuły Fullera. Najlepiej zbadaną spośród nich jest zbudowana z sześciokątów i pięciokątów foremnych cząsteczka węgla C_{60}, idealnie w kształcie piłki futbolowej o średnicy 7 Å. Poza cząsteczką C_{60} otrzymano jeszcze inne fullereny, jak np. C_{70} o kształcie piłki do rugby i szereg większych C_{240}, C_{540} czy C_{960}. Własności chemiczne i fizyczne nowych cząsteczek zaczęto badać dopiero w 1990 roku po otrzymaniu ich w większych ilościach przez grupę fizyków pracujących w USA (University of Arizona) i RFN (Instytut Maxa Plancka w Heidelbergu). Ze względu na występowanie w fullerenach pięcioczłonowych pierścieni węgla połączonych z pierścieniami sześcioczłonowymi ich własności chemiczne przypominają nieco związki organiczne nazywane aromatycznymi. Niezwykle interesujące okazały się za to ich własności fizyczne. Fullereny C_{60} krystalizują tworząc strukturę regularną płasko centrowaną o stałej sieci równej 14,2 Å. Otrzymane żółte kryształki tworzą półprzewodnik molekularny o przerwie energetycznej wynoszącej około 2 eV. Jest to nowa, nie znana dotychczas postać alotropowa węgla. Jeżeli wolne miejsca pomiędzy piłkami węglowymi wypełnimy atomami potasu, wówczas otrzymujemy pierwszy w pełni trójwymiarowy metal molekularny o wzorze chemicznym K_3C_{60}. Metal ten okazał się nadprzewodnikiem o temperaturze krytycznej wynoszącej 18 K. Fakt ten wywołał zrozumiałe zainteresowanie i dalsze poszukiwania. Po zastąpieniu potasu innymi metalami udało się ostatnio podnieść temperaturą krytyczną do 43 K. Wróćmy jednak do związku z potasem. Dalsze powiększanie ilości tego pierwiastka prowadzi do nowej substancji o wzorze chemicznym K_6C_{60} i odmiennej strukturze krystalicznej. Są to kryształy regularne, przestrzennie centrowane o stałej sieci wynoszącej 11,4 Å. Piłka węglowa umieszczona w środku każdego z sześcianów otoczona jest 24 atomami potasu. Kryształ K_6C_{60} jest znów półprzewodnikiem o przerwie energetycznej około 1 eV. W przeciwieństwie jednak do krystalicznego C_{60} jest on materiałem silnie jonowym, w którym cząsteczka C_{60} wiąże 6 nadliczbowych elektronów dostarczanych przez otaczające atomy potasu. Intensywne badania fullerenów i ich związków trwają obecnie w wielu laboratoriach świata i w każdej chwili możemy oczekiwać nowych zaskakujących rezultatów.