# System reprezentantów, czyli rzecz o tłumaczach, komisjach itp.

*Przemysław GRZEGORZEWSKI*

Polska firma translatorska świadcząca usługi w zakresie tłumaczeń kabinowych z polskiego na angielski, francuski, hiszpański i niemiecki otrzymała zlecenie na obsługę międzynarodowej konferencji. Każda osoba zatrudniona w tej firmie zna co najmniej jeden język obcy. Interesuje nas odpowiedź na pytanie, kiedy firma ta może przyjąć zlecenie, tzn. czy istnieje taki sposób doboru tłumaczy, którymi dysponuje firma, aby zapewniona była jednoczesna obsługa wymaganych języków.

Rozpatrzmy inny przykład, tzw. problem komisji. Otóż w pewnej instytucji (np. sejmie) działa kilka komisji, przy czym członkowie owej instytucji (posłowie) mogą należeć do kilku komisji jednocześnie. Nasuwa się pytanie, czy w tej sytuacji jest możliwe wybranie przewodniczących każdej komisji w taki sposób, aby każda komisja miała innego przewodniczącego.

Te dwa przykłady są ilustracją matematycznego problemu znanego pod nazwą wyboru systemu reprezentantów.

Weźmy pod uwagę ciąg $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podzbiorów pewnego skończonego zbioru $Z$ (podzbiory te są, być może, równe). Systemem reprezentantów dla ciągu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy taki ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parami różnych elementów, że $x_i \in X_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Szukamy odpowiedzi na pytanie, czy dla danego ciągu zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ istnieje system reprezentantów, innymi słowy, czy z każdego zbioru $X_i$ można wybrać po jednym elemencie w taki sposób, by były one parami różne. Jeszcze inaczej, interesuje nas, czy istnieje taka różnowartościowa funkcja $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, że $f(i) = x_i \in X_i$. System reprezentantów będziemy oznaczali przez $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Przeanalizujemy to zagadnienie na przykładzie wspomnianego na wstępie problemu tłumaczeń. Niech $Z = \{A, B, C, D\}$ oznacza zbiór zatrudnionych w firmie tłumaczy. Niech $X_1$ oznacza zbiór tych osób, ze zbioru $Z$, które znają język angielski, $X_2$ tych, które znają francuski, $X_3$ – hiszpański, $X_4$ – niemiecki.

a) Załóżmy, że $X_1 = \{A, B, C, D\}$, $X_2 = \{A, D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{C, D\}$. W tym przypadku, jak łatwo zauważyć, $\langle B, A, C, D \rangle$ jest poszukiwanym systemem reprezentantów (w terminach naszego przykładu osoba $B$ powinna prowadzić tłumaczenie na język angielski, $A$ – na francuski, $C$ – na hiszpański, a $D$ – na niemiecki). Zatem dla danego ciągu zbiorów istnieje rozwiązanie i jest ono jedyne (firma może przyjąć zlecenie).

identyczne równanie rekurencyjne, jak w przypadku królików. Pozostaje określić warunki początkowe: $T_0 = 2$ (przyjmujemy dziadków za 0-pradziadków), $T_1 = 3$ i jasne jest, że ogólnie zachodzi po prostu $T_n = F_{n+3}$.

**Problem 2.**
*Elfy skacząc po schodach czasami przeskakują po dwa schodki. Na ile sposobów może elf wskoczyć na n schodów?*

Tym razem od razu poddamy się i zaczniemy rozumowanie indukcyjne. Oznaczmy przez $E_n$ liczbę sposobów, za pomocą których elf może wskoczyć na $n$ schodów. Aby wskoczyć na $n$-ty schodek, elf musi to zrobić ze schodka $n-1$ lub $n-2$. W związku z tym $E_n = E_{n-1} + E_{n-2}$. Zauważając jeszcze, że $E_1 = 1$, $E_2 = 2$ dostaniemy oczywistą odpowiedź, że $E_n = F_{n+1}$.

**Problem 3.**
*Ile jest eleganckich sposobów posadzenia łącznie n pań i panów na podłużnej ławie. Eleganckich, czyli takich, aby żadne dwie panie nie siedziały obok siebie (interesują nas jedynie różne wzajemne rozmieszczenia pań i panów, to znaczy interesuje nas tylko, które miejsca są zajęte przez panie, a które przez panów).*

Widać, że jeżeli mamy do dyspozycji samych panów, to możemy ich posadzić na jeden sposób. Jedną panią z $n-1$ panami można posadzić na $n$ sposobów. Z dwiema już będzie trochę kłopotu. Z trzema – tym bardziej. Łatwo zauważyć, że pań nie może być więcej niż $\lceil n/2 \rceil$ ($\lceil x \rceil$ – najmniejsza liczba całkowita większa lub równa $x$).

Rekurencja ze względu na liczbę pań przy ustalonym $n$ jest trudna do wyprowadzenia. Zastanówmy się jednak, czy nie dałoby się przeprowadzić rozumowania rekurencyjnego ze względu na $n$?

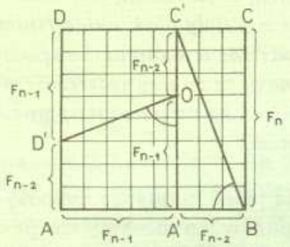
Oznaczmy przez $S_n$ liczbę takich $n$-posadzeń, że żadne dwie panie nie siedzą obok siebie i załóżmy, że znamy $S_k$ dla wszystkich $k < n$. Zliczając wszystkie $n$-posadzenia musimy zdecydować, czy na $n$-tym miejscu będzie siedziała pani, czy też pan. Jeżeli pani, to na $n-1$ miejscu musi siedzieć pan, a na pierwszych $n-2$ miejscach możemy posadzić dowolny z $S_{n-2}$ układów. Jeżeli pan, to ze względu na to, że pan na $n$-tym miejscu nie czyni żadnego kłopotu, widzimy, że na pierwszych $n-1$ miejscach możemy użyć dowolny z $S_{n-1}$ układów. Łącznie, oczywiście, znowu uzyskujemy $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. A ponieważ $S_1 = 2$ i $S_2 = 3$, więc $S_n = F_{n+2}$.

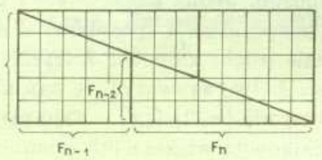
Jeżeli Czytelnik odniósł wrażenie, że każde rozumowanie rekurencyjne daje w wyniku liczby Fibonacciego, to pragnę go uspokoić, że nie jest aż tak dobrze. Wystarczy nieco zmienić każdy z tych trzech problemów (np. dopuścić, aby elfy skakały także po trzy schodki, albo rozważyć posadzenia przy okrągłym stole), aby nie tylko warunki początkowe, ale i same równania wyszły inne.

Z liczbami Fibonacciego niewiele działo się przez parę wieków i oto francuski astronom Jean Dominique Cassini (ten od szczeliny w pierścieniach Saturna) udowodnił w 1660 roku bodaj pierwsze twierdzenie o liczbach Fibonacciego:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n .$$

Tożsamość Cassiniego była podstawą do skonstruowania ulubionego przez Lewisa Carrolla paradoksu o rozcięciu kwadratu.




Jeżeli kwadrat o boku $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ jednostek (w oryginale Carrolla $n = 6$) rozetniemy wzdłuż zaznaczonych linii i ułożymy z uzyskanych części „prostokąt" – tak jak na rysunku, to zyskamy (dla $n$ parzystych) lub zgubimy (dla $n$ nieparzystych) jeden mały kwadracik. W przykładzie z rysunku pole kwadratu wynosi $F_6^2 = 64$, pole zaś „prostokąta": $F_7 \cdot F_5 = 65$, mimo iż „prostokąt" zbudowaliśmy z tych samych figur. Rzecz jasna, wyjaśnienie tego paradoksu leży w tym, że w wyniku podanej konstrukcji kąty $A'BC'$ oraz $A'OD'$ nie są równe. W rzeczywistości więc „prostokąt" będzie miał równoległobokową dziurę (o polu 1). A ponieważ, jak wynika z tożsamości Cassiniego, kąty $A'BC'$ oraz $A'OD'$ różnią się bardzo niewiele, więc ta równoległobokowa dziura będzie bardzo wąska – praktycznie niezauważalna.

b) Jednakże dla innego ciągu zbiorów (innego rozkładu znajomości języków wśród pracowników firmy), np. dla $X_1 = \{A, B, C, D\}$, $X_2 = \{D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{C, D\}$ nie istnieje system reprezentantów.

c) Z kolei może się zdarzyć, że dla pewnego ciągu zbiorów istnieje więcej niż jeden system reprezentantów. Na przykład dla $X_1 = \{B, C, D\}$, $X_2 = \{A, D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{A, C, D\}$ mamy dokładnie dwa systemy reprezentantów: $\langle B, A, C, D\rangle$ i $\langle B, D, C, A\rangle$.

Widzimy więc, że istnienie systemu reprezentantów zależy od ciągu rozpatrywanych zbiorów. Warunki, jakie musi spełniać ów ciąg, aby istniał dlań system reprezentantów, określa następujące twierdzenie Philipa Halla.

**Twierdzenie.**
Na to, aby ciąg zbiorów skończonych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ miał system reprezentantów, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego zbioru indeksów $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniony był następujący warunek (warunek Halla):

$$\left|\bigcup_{i \in I} X_i\right| \geq |I|$$

($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru $X$).

Zauważmy, że w sytuacji b), dla której nie istniał system reprezentantów, warunek Halla nie był spełniony, bo

$$|X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 2 < |\{2, 3, 4\}| = 3 .$$

Naturalne staje się obecnie pytanie o możliwość ewentualnych uogólnień powyższego twierdzenia. Otóż istnieje taka „nieskończona" wersja twierdzenia Halla, mianowicie:

Dowolna indeksowana rodzina zbiorów skończonych $(X_t)_{t \in T}$ ma system reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej skończona podrodzina $(X_i)_{i \in I}$, gdzie $I$ jest skończonym podzbiorem $T$, spełnia warunek Halla.

Powyższe twierdzenie przestaje, niestety, być prawdziwe, gdy choć jeden ze zbiorów $X_t$ jest nieskończony. Nie znamy także żadnych warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie systemu reprezentantów dla dowolnej rodziny zbiorów.

Twierdzenie Halla określając warunki istnienia systemu reprezentantów odpowiada w zasadzie na postawiony przez nas problem. Jest to twierdzenie ważne, a zarazem piękne dzięki swojej prostocie. Nie ma ono jednak większego znaczenia z algorytmicznego punktu widzenia, bowiem sprawdzenie warunku Halla wymaga rozważenia wszystkich $2^n$ możliwych podzbiorów zbioru indeksów $\{1, 2, \ldots, n\}$. Twierdzenie to jest nieefektywne, tzn. mówi, przy jakich założeniach istnieje system reprezentantów, ale nie wskazuje sposobu jego wyznaczenia. Najszybszym znanym algorytmem konstruującym system reprezentantów dla danego ciągu zbiorów, o ile taki system istnieje, jest algorytm Hopcrofta-Karpa. Problem ten można również rozwiązać sprowadzając go do wyznaczenia maksymalnego przepływu zero-jedynkowego w odpowiedniej sieci (zainteresowanych odsyłam do literatury, tam też można znaleźć dowody przytoczonych twierdzeń).

Twierdzenie Halla ma jednakże znaczenie nie tylko poznawcze czy estetyczne. Jest ono użytecznym narzędziem wykorzystywanym w dowodzeniu innych ważnych twierdzeń. Takim klasycznym zastosowaniem uogólnionej wersji twierdzenia Halla jest dowód równoliczności baz przestrzeni liniowej, który zamieścimy na zakończenie.

**Twierdzenie.**
Niech $L$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $K$, a $X$ i $Y$ dwiema bazami tej przestrzeni.
Bazy te są równoliczne, tzn. $|X| = |Y|$.
**Dowód.**
Każdy wektor $x \in X$ ma przedstawienie (jednoznaczne) postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, gdzie $y_i \in Y$, $a_i \in K$, $a_i \neq 0$. Oznaczmy przez $Y_x$ te wektory z bazy $Y$, które występują w rozwinięciu wektora $x$ względem bazy $Y$ (tzn. $Y_x = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$). Okazuje się, że każda skończona podrodzina rodziny zbiorów $(Y_x)_{x \in X}$ spełnia warunek Halla. Gdyby tak bowiem nie było, to mielibyśmy $|Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup \ldots \cup Y_{x_k}| < k$ dla pewnego ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_k$, co oznaczałoby, że każdy spośród liniowo niezależnych wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wyraża się jako kombinacja liniowa wektorów ze zbioru co najwyżej $k-1$-elementowego $Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup \ldots \cup Y_{x_k}$, co jest, oczywiście, niemożliwe.
Istnieje zatem system reprezentantów dla rodziny $(Y_x)_{x \in X}$, czyli istnieje pewna różnowartościowa funkcja $f : X \to Y$. Wobec symetrii zagadnienia istnieje również różnowartościowa funkcja $g : Y \to X$. Zatem na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina $|X| = |Y|$.

c.b.d.o.

Literatura:
W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1989.
W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.

Mówimy, że dwa zbiory $A$ i $B$ są równoliczne, jeżeli istnieje odwzorowanie $f : A \to B$ różnowartościowe i na. A więc każdy punkt $a$ zbioru $A$ został połączony w parę z dokładnie jednym punktem $f(a)$ zbioru $B$ i każdy punkt $b$ zbioru $B$ został połączony z dokładnie jednym punktem $f^{-1}(b)$ zbioru $A$. Jeżeli zbiory $A$ i $B$ są skończone, to takie połączenie w pary jest możliwe jedynie w przypadku, gdy zbiory $A$ i $B$ mają tyle samo elementów. A więc pojęcie równoliczności jest uogólnieniem pojęcia równej liczby elementów na przypadek, gdy zbiory są dowolne – skończone lub nieskończone.

**Twierdzenie Cantora-Bernsteina** brzmi tak:

*Jeśli zbiór $A$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $B$, zbiór $B$ zaś jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $A$, to zbiory $A$ i $B$ są równoliczne.*

Intuicyjnie twierdzenie to jest oczywiste. Można je bowiem – używając języka obrazowego – przeformułować tak:
*Jeśli zbiór $A$ ma nie więcej elementów niż zbiór $B$, zbiór $B$ zaś ma nie więcej elementów niż zbiór $A$, to zbiory $A$ i $B$ mają tyle samo elementów.*

Kolejną ciekawą własnością liczb Fibonacciego jest istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$. Granica ta wynosi $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$, zbieżność zaś jest bardzo szybka. Liczba $\phi$ sama w sobie kryje wiele tajemnic, m.in. wyraża tzw. złoty stosunek dający miłe dla oka proporcje kształtu prostokąta. Proporcja ta była często używana przez starożytnych artystów.

Liczby Fibonacciego do dziś kryją w sobie wiele wciąż odkrywanych faktów. Ukazuje się nawet pismo *Fibonacci Quarterly*, w którym co kwartał publikowane są nowe wyniki dotyczące tych liczb. Zaskakujące, że dopiero w 1972 roku E. Zeckendorf udowodnił następującą ciekawą, a zarazem elementarną własność liczb Fibonacciego:
*Twierdzenie.* Każda liczba naturalna $n$ ma *jednoznaczne* przedstawienie w postaci

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r},$$

gdzie $k_1 \gg k_2 \gg \ldots \gg k_r \gg 0$,
symbol zaś $i \gg j$ oznacza, że $i > j+1$.
(Ostatnia nierówność pozwala na używanie tylko jednej jedynki: $F_1$.)

Innymi słowy – liczby Fibonacciego mogą służyć jako baza binarnego systemu pozycyjnego. Rozwinięcie każdej liczby $n$ będzie w tym układzie takim ciągiem zer i jedynek, że żadne dwie jedynki nie będą sąsiadowały, zaś na $i-1$ miejscu od prawej wystąpi jedynka wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $F_i$ występuje w rozwinięciu z twierdzenia Zeckendorfa. Dla przykładu

$$50 = 34 + 13 + 3 = (10100100)_F.$$

Algorytm zamiany liczb na układ Fibonacciego jest prosty: należy do rozkładu brać jak największe liczby Fibonacciego, na które jest jeszcze miejsce.

Ponieważ każda liczba Fibonacciego $F_n$ ma rozkład $1\underbrace{00\ldots000}_{n-2 \text{ zer}}$, więc jest jasne, że musimy umieć zapisać liczby mniejsze od $F_n$ (łącznie z zerem jest ich $F_n$) na $n-2$ pozycjach. Przypomnijmy sobie, ile jest takich ciągów zerojedynkowych o $n-2$ elementach, że żadne dwie jedynki nie występują koło siebie. Oczywiście, jest ich tyle, ile jest posadzeń pań (jedynek) i panów (zer) na ławie przy $n-2$ nakryciach tak, aby żadne dwie panie ze sobą nie sąsiadowały, czyli właśnie $F_n$. Wykazaliśmy więc, że na $n-2$ pozycjach jest wystarczająco dużo miejsca do reprezentacji $F_n$ liczb za pomocą „eleganckich" ciągów zerojedynkowych. Aby udowodnić twierdzenie Zeckendorfa, wystarczy wykazać, że po pierwsze