Jak nie świecą gwiazdy?

Tomasz KWAST

Gwiazdy, a więc i Słońce, świecą dzięki zachodzącym w ich wnętrzach reakcjom termojądrowym. Kto o tym słyszał, tak się prawdopodobnie do tego faktu przyzwyczaił, że nie wyobraża sobie, iż kiedyś można było przypuszczać co innego. Zrozumiałe byłoby, gdyby przed odkryciem przemian jądrowych astronomowie nie mieli żadnego poglądu na przyczyny świecenia gwiazd. Tymczasem rozważane były różne hipotezy, może naiwne z dzisiejszego punktu widzenia, a odrzucenie przedostatniej – robiącej podówczas wrażenie całkiem dobrej – nastąpiło dzięki osiągnięciom wcale nie astronomów.

Aby móc zrozumieć, co dzieje się na Słońcu, musimy wpierw zdobyć przekonanie, że prawidłowo znamy jego odległość od Ziemi; od tej odległości wszystko dalej zależy. Otóż znając prawa ruchu planet można uprawiać mechanikę nieba nie znając żadnych odległości – wystarczy znać stosunki odległości. W mechanice nieba za jednostkę odległości przyjmuje się średnią odległość Ziemi od Słońca i nie trzeba się troszczyć, ile to jest metrów. Jest to jednak ważne, gdy chcemy poznać fizyczne warunki na Słońcu. Wystarczy więc zmierzyć w metrach jakąkolwiek odległość jakiejkolwiek planety czy planetoidy od Ziemi – np. dziś radarowo. I tak nieco okrężnymi drogami stwierdzono, że do Słońca jest $r = 1,5 \times 10^{11}$ m – jest to tzw. jednostka astronomiczna (j.a.). Promień Słońca otrzymujemy już natychmiast; wynosi on tyle, co iloczyn odległości i promienia kątowego tarczy Słońca. Wynik brzmi: $R = 6,96 \times 10^8$ m.

Następny krok to zorientowanie się, jaka jest moc i temperatura Słońca. Potrzebny jest tu następny pomiar: ilość energii padającej prostopadle na jednostkę powierzchni Ziemi w ciągu sekundy. Mniejsza o szczegóły techniczne – pomiar tej tzw. stałej słonecznej jest wykonalny rozmaitymi metodami i daje wynik $S = 1,36$ kW/m^2. Ilość energii przenikającej przez sferę o promieniu 1 j.a. jest równa ilości energii przenikającej przez powierzchnię Słońca, czyli przez sferę o promieniu R – jest to bowiem ten sam strumień energii. Pełna moc Słońca wynosi więc

$$L = 4\pi r^2 S = 3,82 \times 10^{26}\ \mathrm{W},$$

a jego powierzchnia promieniuje z natężeniem

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} = 6,28 \times 10^7\ \mathrm{W/m^2}.$$

Wreszcie temperaturę mamy z prawa Stefana-Boltzmanna, głoszącego, że $F = \sigma T^4$, gdzie $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4. Łatwo więc dostajemy temperaturę powierzchni Słońca $T = 5770$ K.

W takiej temperaturze wszelkie substancje istnieją tylko w stanie gazowym (no, chyba że rzecz się dzieje na gwieździe neutronowej!), a przyczyna tej temperatury, czyli źródło energii może, w zasadzie, być na powierzchni lub we wnętrzu Słońca. Rozpatrzmy wpierw pierwszą możliwość. Pomysł, że Słońce może jest płonącą bryłą węgla czy innego paliwa chemicznego, jest wręcz żenujący. Skąd tlen w przestrzeni kosmicznej? Gdzie produkty spalania? Ponadto spalanie węgla nie daje tak wysokiej temperatury. Wreszcie Czytelnik sam może obliczyć, że bryła węgla o masie Słońca spalałaby się (gdyby płonęła z mocą L) w kilka tysięcy lat. A skąd znamy masę Słońca $M = 1,989 \times 10^{30}$ kg?

Liczby Fibonacciego

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Kiedy Leonardo Bonacci z Pizy, zwany Fibonaccim, opublikował w 1202 roku swoją słynną książkę *Liber abaci* stanowiącą kompendium z algebry na znakomitym jak na ówczesną Europę poziomie, nie przypuszczał zapewne, że liczby, które wprowadził dla rozwiązania jednego z zadań, zostaną nazwane jego imieniem. Tym bardziej chyba nie przypuszczał, że blisko 800 lat później będą często używane w informatyce, gdzie wystąpią przy analizie wielu algorytmów, a także przy konstrukcji efektywnych typów danych.

Oryginalne zadanie, które Fibonacci rozważał, dotyczyło rozmnażania się królików. Chodziło mianowicie o określenie, ile par królików będzie liczyła po 12 miesiącach populacja zaczęta przez jedną parę, przy założeniu, że po urodzeniu każda para królików dojrzewa przez pierwszy miesiąc, a począwszy od drugiego wydaje na świat potomstwo co miesiąc (przyjmuje się przy tym, że każda para jednorazowo płodzi jedną parę królicząt). Przy tych założeniach rozumowanie Fibonacciego przebiegało następująco:

Ponieważ pierwsza para w pierwszym miesiącu daje jako potomstwo parę, więc w tym miesiącu będą dwie pary; z nich jedna para, a mianowicie pierwsza, rodzi również w następnym miesiącu, więc w drugim miesiącu będą 3 pary; z nich w następnym miesiącu będą dawały potomstwo dwie pary, a więc w trzecim miesiącu urodzą się jeszcze dwie pary królików i liczba par królików w tym miesiącu osiągnie wartość 5...

Dalej analogiczny wywód ciągnie się aż do dwunastego miesiąca, aby po kilku dodawaniach dojść do liczby 377, będącej końcowym wynikiem. Idea wywodu daje się streścić następująco:

W pierwszym miesiącu mamy dwie pary, w drugim – trzy. Chcąc uzyskać liczbę par królików w miesiącu $n+2$ powinniśmy do ich liczby z miesiąca $n+1$ dodać te, które istniały w miesiącu n i wydały właśnie na świat kolejne (być może pierwsze) młode.

Załóżmy, zgodnie z tradycją oznaczania liczb Fibonacciego (a niezgodnie z oryginałem), że zarówno pierwsza, jak i druga liczba Fibonacciego są jedynkami (tak jak gdyby w pierwszym miesiącu macierzysta para powstała, a w drugim – jeszcze dojrzewała). Definiujemy zatem

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 1 .$$

Kolejne liczby, uzyskane bezpośrednio z definicji, to

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233...

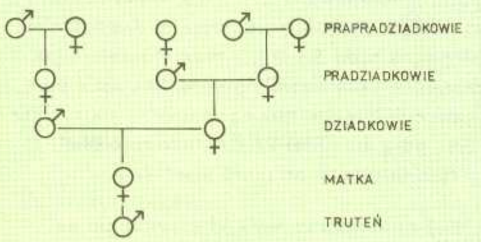
Pomysł doprawdy ciekawy: zamiast podać wynik zadania, podaje się jedynie sposób, w jaki każdy może do niego dojść. Czy można uznać to zadanie za rozwiązane?

Jeżeli mamy ochotę odrzucić tego typu „algorytmiczne" rozwiązania, to zdajmy sobie sprawę, że w wielu przypadkach trudno jest inaczej zaatakować problem, niż w taki, rekurencyjny, sposób, w jaki zrobił to Fibonacci.

Przykładowo rozważmy trzy takie problemy:

Problem 1.
Ile $\underbrace{\text{pra-pra-...pra-}}_{n}$ dziadków i babć ma pszczeli truteń?

Trzeba, oczywiście, wiedzieć, że u pszczół trutnie mają tylko matkę – królową, powstają bez udziału ojca, podczas gdy królowe mają już dwoje rodziców – inną królową i trutnia. Drzewo genealogiczne trutnia wygląda więc tak:



Niech T_n oznacza liczbę n-praprzodków. Widzimy już, że na poziomie pierwszych pradziadków truteń ma dwie prababcie i jednego pradziadka, łącznie troje; piętro wyżej – na poziomie drugich pradziadków – pięcioro: trzy praprababcie i dwóch prapradziadków. Ogólnie na poziomie n-tych pradziadków ma dokładnie T_{n-1} n-prababć oraz T_{n-2} n-pradziadków – łącznie $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ n-praprzodków. Otrzymaliśmy zatem

Oczywiście, z trzeciego prawa Keplera: $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$, gdzie T jest okresem obiegu Ziemi wokół Słońca (czyli po prostu rokiem gwiazdowym), a stała grawitacji G jest znana z pomiarów fizycznych. Tak więc hipoteza „węglowa" prowadzi natychmiast do wielu sprzeczności; odrzucamy również inną, zgodnie z którą energia Słońca byłaby energią spadających na nie meteorytów. Gdyby bowiem meteoryty spadały na Słońce z prędkością rzędu prędkości ucieczki $v = \sqrt{2GM/R}$, to dla zapewnienia obserwowanej mocy musiałyby te meteoryty spadać w tempie

$$\dot{m} = \frac{2L}{v^2} = \frac{LR}{GM} = 2 \times 10^{15}\ \mathrm{kg/s}.$$

Pod takim samym ostrzałem znajdowałaby się też Ziemia, a musiałoby na nią spadać meteorytów w przybliżeniu 10^4 razy mniej, tyle razy bowiem powierzchnia Ziemi jest mniejsza od powierzchni Słońca. Tymczasem szacuje się, że na Ziemię spada około 10^5 kg materii meteorowej dziennie, czyli w przybliżeniu 1 kg/s zamiast 2×10^{11}. Rozbieżność zbyt wielka.

Zajmijmy się więc drugą możliwością: źródło energii Słońca tkwi w jego wnętrzu. W połowie XIX w. Helmholtz wysunął hipotezę, że Słońce czerpie swą energię z kurczenia się, tzn. jego promieniowanie jest przetworzoną energią grawitacyjną. Energia ta, wyzwolona przy skurczeniu się Słońca do obecnej postaci wynosi GM^2/R razy pewien czynnik zależny od szczegółów budowy wewnętrznej. Drogą dość drobiazgowych rozważań można wykazać, że czynnik ten niezbyt różni się od jedności dla każdej zwyczajnej gwiazdy. Łatwo zatem obliczyć, że Słońce, świecąc według tego mechanizmu i z taką mocą jak obecnie, powinno mieć w przybliżeniu $(GM^2/R) : L = 10^{15}$ s = 32 mln lat. W czasach Helmholtza czas ten wydawał się już bardzo długi, a jednak i tę hipotezę trzeba było odrzucić. Mianowicie, oceny wieku Ziemi zarówno na podstawie pomiarów promieniotwórczości skał, jak i tempa przemian geologicznych zaczęły o rzędy wielkości przekraczać dziesiątki milionów lat. Dziś wiemy, że zapadanie się gwiazdy bywa źródłem jej energii, ale albo w bardzo wczesnym etapie jej życia (gdy zapada się jeszcze obłok, z którego gwiazda powstaje), albo w bardzo późnym (gdy gwałtownie zapada się jej gęste jądro, czyli eksploduje supernowa).

Rozwiązanie problemu nastąpiło dopiero po odkryciu przemian jądrowych. W latach czterdziestych naszego stulecia Hans Albrecht Bethe zaproponował mechanizm produkcji energii w gwiazdach w wyniku łączenia się jąder wodorowych w jądra helu. Hipoteza ta jest nie do obalenia do dziś, a nawet przeciwnie – jest już porządnie ugruntowaną teorią, uhonorowaną Nagrodą Nobla.

A idea jest prosta. Spojrzawszy do dowolnych tablic fizycznych każdy stwierdzi, że jądro atomu helu jest nieco lżejsze od czterech protonów, niedużo, zaledwie o 0,0285 jednostki masy atomowej. Jednak właśnie ten ubytek masy pomnożony przez kwadrat prędkości światła daje 26,72 MeV, a to pomnożone przez jakąś fantastyczną liczbę reakcji zachodzących w Słońcu w ciągu sekundy daje obliczone przez nas L. Jak widać, ubywa 0,0071 masy w każdej reakcji i gdyby czysto wodorowe Słońce zużyło ten wodór doszczętnie, to też tyle straciłoby na masie. A przy obecnej mocy starczyłoby tego paliwa na $0,0071Mc^2/L = 3,3 \times 10^{18}$ s $= 10^{11}$ lat. Jest to ocena, oczywiście, zawyżona, niechby nawet o rząd wielkości, i tak pozostanie nam świadomość, że tym razem znaleźliśmy jakąś cząstkę prawdy o Wszechświecie.

System reprezentantów, czyli rzecz o tłumaczach, komisjach itp.

Przemysław GRZEGORZEWSKI

Polska firma translatorska świadcząca usługi w zakresie tłumaczeń kabinowych z polskiego na angielski, francuski, hiszpański i niemiecki otrzymała zlecenie na obsługę międzynarodowej konferencji. Każda osoba zatrudniona w tej firmie zna co najmniej jeden język obcy. Interesuje nas odpowiedź na pytanie, kiedy firma ta może przyjąć zlecenie, tzn. czy istnieje taki sposób doboru tłumaczy, którymi dysponuje firma, aby zapewniona była jednoczesna obsługa wymaganych języków.

Rozpatrzmy inny przykład, tzw. problem komisji. Otóż w pewnej instytucji (np. sejmie) działa kilka komisji, przy czym członkowie owej instytucji (posłowie) mogą należeć do kilku komisji jednocześnie. Nasuwa się pytanie, czy w tej sytuacji jest możliwe wybranie przewodniczących każdej komisji w taki sposób, aby każda komisja miała innego przewodniczącego.

Te dwa przykłady są ilustracją matematycznego problemu znanego pod nazwą wyboru systemu reprezentantów.

Weźmy pod uwagę ciąg $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podzbiorów pewnego skończonego zbioru Z (podzbiory te są, być może, równe). Systemem reprezentantów dla ciągu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy taki ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parami różnych elementów, że $x_i \in X_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Szukamy odpowiedzi na pytanie, czy dla danego ciągu zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ istnieje system reprezentantów, innymi słowy, czy z każdego zbioru X_i można wybrać po jednym elemencie w taki sposób, by były one parami różne. Jeszcze inaczej, interesuje nas, czy istnieje taka różnowartościowa funkcja $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, że $f(i) = x_i \in X_i$. System reprezentantów będziemy oznaczali przez $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Przeanalizujemy to zagadnienie na przykładzie wspomnianego na wstępie problemu tłumaczeń. Niech $Z = \{A, B, C, D\}$ oznacza zbiór zatrudnionych w firmie tłumaczy. Niech X_1 oznacza zbiór tych osób, ze zbioru Z, które znają język angielski, X_2 tych, które znają francuski, X_3 – hiszpański, X_4 – niemiecki.

a) Załóżmy, że $X_1 = \{A, B, C, D\}$, $X_2 = \{A, D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{C, D\}$. W tym przypadku, jak łatwo zauważyć, $\langle B, A, C, D \rangle$ jest poszukiwanym systemem reprezentantów (w terminach naszego przykładu osoba B powinna prowadzić tłumaczenie na język angielski, A – na francuski, C – na hiszpański, a D – na niemiecki). Zatem dla danego ciągu zbiorów istnieje rozwiązanie i jest ono jedyne (firma może przyjąć zlecenie).

identyczne równanie rekurencyjne, jak w przypadku królików. Pozostaje określić warunki początkowe: $T_0 = 2$ (przyjmujemy dziadków za 0-pradziadków), $T_1 = 3$ i jasne jest, że ogólnie zachodzi po prostu $T_n = F_{n+3}$.

Problem 2.
Elfy skacząc po schodach czasami przeskakują po dwa schodki. Na ile sposobów może elf wskoczyć na n schodów?

Tym razem od razu poddamy się i zaczniemy rozumowanie indukcyjne. Oznaczmy przez E_n liczbę sposobów, za pomocą których elf może wskoczyć na n schodów. Aby wskoczyć na n-ty schodek, elf musi to zrobić ze schodka $n-1$ lub $n-2$. W związku z tym $E_n = E_{n-1} + E_{n-2}$. Zauważając jeszcze, że $E_1 = 1$, $E_2 = 2$ dostaniemy oczywistą odpowiedź, że $E_n = F_{n+1}$.

Problem 3.
Ile jest eleganckich sposobów posadzenia łącznie n pań i panów na podłużnej ławie. Eleganckich, czyli takich, aby żadne dwie panie nie siedziały obok siebie (interesują nas jedynie różne wzajemne rozmieszczenia pań i panów, to znaczy interesuje nas tylko, które miejsca są zajęte przez panie, a które przez panów).

Widać, że jeżeli mamy do dyspozycji samych panów, to możemy ich posadzić na jeden sposób. Jedną panią z $n-1$ panami można posadzić na n sposobów. Z dwiema już będzie trochę kłopotu. Z trzema – tym bardziej. Łatwo zauważyć, że pań nie może być więcej niż $\lceil n/2 \rceil$ ($\lceil x \rceil$ – najmniejsza liczba całkowita większa lub równa x).

Rekurencja ze względu na liczbę pań przy ustalonym n jest trudna do wyprowadzenia. Zastanówmy się jednak, czy nie dałoby się przeprowadzić rozumowania rekurencyjnego ze względu na n?

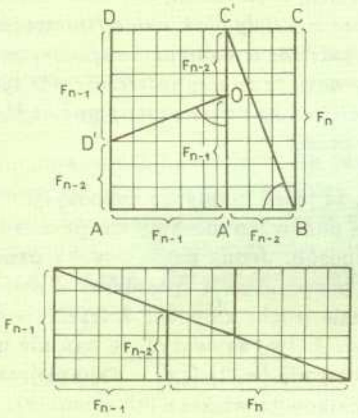
Oznaczmy przez S_n liczbę takich n-posadzeń, że żadne dwie panie nie siedzą obok siebie i załóżmy, że znamy S_k dla wszystkich $k < n$. Zliczając wszystkie n-posadzenia musimy zdecydować, czy na n-tym miejscu będzie siedziała pani, czy też pan. Jeżeli pani, to na $n-1$ miejscu musi siedzieć pan, a na pierwszych $n-2$ miejscach możemy posadzić dowolny z S_{n-2} układów. Jeżeli pan, to ze względu na to, że pan na n-tym miejscu nie czyni żadnego kłopotu, widzimy, że na pierwszych $n-1$ miejscach możemy użyć dowolny z S_{n-1} układów. Łącznie, oczywiście, znowu uzyskujemy $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. A ponieważ $S_1 = 2$ i $S_2 = 3$, więc $S_n = F_{n+2}$.

Jeżeli Czytelnik odniósł wrażenie, że każde rozumowanie rekurencyjne daje w wyniku liczby Fibonacciego, to pragnę go uspokoić, że nie jest aż tak dobrze. Wystarczy nieco zmienić każdy z tych trzech problemów (np. dopuścić, aby elfy skakały także po trzy schodki, albo rozważyć posadzenia przy okrągłym stole), aby nie tylko warunki początkowe, ale i same równania wyszły inne.

Z liczbami Fibonacciego niewiele działo się przez parę wieków i oto francuski astronom Jean Dominique Cassini (ten od szczeliny w pierścieniach Saturna) udowodnił w 1660 roku bodaj pierwsze twierdzenie o liczbach Fibonacciego:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Tożsamość Cassiniego była podstawą do skonstruowania ulubionego przez Lewisa Carrolla paradoksu o rozcięciu kwadratu.



Jeżeli kwadrat o boku $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ jednostek (w oryginale Carrolla $n = 6$) rozetniemy wzdłuż zaznaczonych linii i ułożymy z uzyskanych części „prostokąt" – tak jak na rysunku, to zyskamy (dla n parzystych) lub zgubimy (dla n nieparzystych) jeden mały kwadracik. W przykładzie z rysunku pole kwadratu wynosi $F_6^2 = 64$, pole zaś „prostokąta": $F_7 \cdot F_5 = 65$, mimo iż „prostokąt" zbudowaliśmy z tych samych figur. Rzecz jasna, wyjaśnienie tego paradoksu leży w tym, że w wyniku podanej konstrukcji kąty $A'BC'$ oraz $A'OD'$ nie są równe. W rzeczywistości więc „prostokąt" będzie miał równoległobokową dziurę (o polu 1). A ponieważ, jak wynika z tożsamości Cassiniego, kąty $A'BC'$ oraz $A'OD'$ różnią się bardzo niewiele, więc ta równoległobokowa dziura będzie bardzo wąska – praktycznie niezauważalna.

b) Jednakże dla innego ciągu zbiorów (innego rozkładu znajomości języków wśród pracowników firmy), np. dla $X_1 = \{A, B, C, D\}$, $X_2 = \{D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{C, D\}$ nie istnieje system reprezentantów.

c) Z kolei może się zdarzyć, że dla pewnego ciągu zbiorów istnieje więcej niż jeden system reprezentantów. Na przykład dla $X_1 = \{B, C, D\}$, $X_2 = \{A, D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{A, C, D\}$ mamy dokładnie dwa systemy reprezentantów: $\langle B, A, C, D\rangle$ i $\langle B, D, C, A\rangle$.

Widzimy więc, że istnienie systemu reprezentantów zależy od ciągu rozpatrywanych zbiorów. Warunki, jakie musi spełniać ów ciąg, aby istniał dlań system reprezentantów, określa następujące twierdzenie Philipa Halla.

Twierdzenie.
Na to, aby ciąg zbiorów skończonych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ miał system reprezentantów, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego zbioru indeksów $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniony był następujący warunek (warunek Halla):

$$\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \geq |I|$$

($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X).

Zauważmy, że w sytuacji b), dla której nie istniał system reprezentantów, warunek Halla nie był spełniony, bo

$$|X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 2 < |\{2, 3, 4\}| = 3.$$

Naturalne staje się obecnie pytanie o możliwość ewentualnych uogólnień powyższego twierdzenia. Otóż istnieje taka „nieskończona" wersja twierdzenia Halla, mianowicie:

Dowolna indeksowana rodzina zbiorów skończonych $(X_t)_{t\in T}$ ma system reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej skończona podrodzina $(X_i)_{i\in I}$, gdzie I jest skończonym podzbiorem T, spełnia warunek Halla.

Powyższe twierdzenie przestaje, niestety, być prawdziwe, gdy choć jeden ze zbiorów X_t jest nieskończony. Nie znamy także żadnych warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie systemu reprezentantów dla dowolnej rodziny zbiorów.

Twierdzenie Halla określając warunki istnienia systemu reprezentantów odpowiada w zasadzie na postawiony przez nas problem. Jest to twierdzenie ważne, a zarazem piękne dzięki swojej prostocie. Nie ma ono jednak większego znaczenia z algorytmicznego punktu widzenia, bowiem sprawdzenie warunku Halla wymaga rozważenia wszystkich 2^n możliwych podzbiorów zbioru indeksów $\{1, 2, \ldots, n\}$. Twierdzenie to jest nieefektywne, tzn. mówi, przy jakich założeniach istnieje system reprezentantów, ale nie wskazuje sposobu jego wyznaczenia. Najszybszym znanym algorytmem konstruującym system reprezentantów dla danego ciągu zbiorów, o ile taki system istnieje, jest algorytm Hopcrofta-Karpa. Problem ten można również rozwiązać sprowadzając go do wyznaczenia maksymalnego przepływu zero-jedynkowego w odpowiedniej sieci (zainteresowanych odsyłam do literatury, tam też można znaleźć dowody przytoczonych twierdzeń).

Twierdzenie Halla ma jednakże znaczenie nie tylko poznawcze czy estetyczne. Jest ono użytecznym narzędziem wykorzystywanym w dowodzeniu innych ważnych twierdzeń. Takim klasycznym zastosowaniem uogólnionej wersji twierdzenia Halla jest dowód równoliczności baz przestrzeni liniowej, który zamieścimy na zakończenie.

Twierdzenie.
Niech L będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, a X i Y dwiema bazami tej przestrzeni.
Bazy te są równoliczne, tzn. $|X| = |Y|$.
Dowód.
Każdy wektor $x \in X$ ma przedstawienie (jednoznaczne) postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, gdzie $y_i \in Y$, $a_i \in K$, $a_i \neq 0$. Oznaczmy przez Y_x te wektory z bazy Y, które występują w rozwinięciu wektora x względem bazy Y (tzn. $Y_x = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$). Okazuje się, że każda skończona podrodzina rodziny zbiorów $(Y_x)_{x\in X}$ spełnia warunek Halla. Gdyby tak bowiem nie było, to mielibyśmy $|Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup \ldots \cup Y_{x_k}| < k$ dla pewnego ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_k$, co oznaczałoby, że każdy spośród liniowo niezależnych wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wyraża się jako kombinacja liniowa wektorów ze zbioru co najwyżej $k-1$-elementowego $Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup \ldots \cup Y_{x_k}$, co jest, oczywiście, niemożliwe.
Istnieje zatem system reprezentantów dla rodziny $(Y_x)_{x\in X}$, czyli istnieje pewna różnowartościowa funkcja $f : X \to Y$. Wobec symetrii zagadnienia istnieje również różnowartościowa funkcja $g : Y \to X$. Zatem na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina $|X| = |Y|$.

c.b.d.o.

Literatura:
W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1989.
W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.

Mówimy, że dwa zbiory A i B są równoliczne, jeżeli istnieje odwzorowanie $f : A \to B$ różnowartościowe i na. A więc każdy punkt a zbioru A został połączony w parę z dokładnie jednym punktem $f(a)$ zbioru B i każdy punkt b zbioru B został połączony z dokładnie jednym punktem $f^{-1}(b)$ zbioru A. Jeżeli zbiory A i B są skończone, to takie połączenie w pary jest możliwe jedynie w przypadku, gdy zbiory A i B mają tyle samo elementów. A więc pojęcie równoliczności jest uogólnieniem pojęcia równej liczby elementów na przypadek, gdy zbiory są dowolne – skończone lub nieskończone.

Twierdzenie Cantora-Bernsteina brzmi tak:

Jeśli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B, zbiór B zaś jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru A, to zbiory A i B są równoliczne.

Intuicyjnie twierdzenie to jest oczywiste. Można je bowiem – używając języka obrazowego – przeformułować tak:
Jeśli zbiór A ma nie więcej elementów niż zbiór B, zbiór B zaś ma nie więcej elementów niż zbiór A, to zbiory A i B mają tyle samo elementów.

Kolejną ciekawą własnością liczb Fibonacciego jest istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$. Granica ta wynosi $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$, zbieżność zaś jest bardzo szybka. Liczba ϕ sama w sobie kryje wiele tajemnic, m.in. wyraża tzw. złoty stosunek dający miłe dla oka proporcje kształtu prostokąta. Proporcja ta była często używana przez starożytnych artystów.

Liczby Fibonacciego do dziś kryją w sobie wiele wciąż odkrywanych faktów. Ukazuje się nawet pismo *Fibonacci Quarterly*, w którym co kwartał publikowane są nowe wyniki dotyczące tych liczb. Zaskakujące, że dopiero w 1972 roku E. Zeckendorf udowodnił następującą ciekawą, a zarazem elementarną własność liczb Fibonacciego:
Twierdzenie. Każda liczba naturalna n ma *jednoznaczne* przedstawienie w postaci
$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r},$$
gdzie $k_1 \gg k_2 \gg \ldots \gg k_r \gg 0$,
symbol zaś $i \gg j$ oznacza, że $i > j+1$.
(Ostatnia nierówność pozwala na używanie tylko jednej jedynki: F_1.)

Innymi słowy – liczby Fibonacciego mogą służyć jako baza binarnego systemu pozycyjnego. Rozwinięcie każdej liczby n będzie w tym układzie takim ciągiem zer i jedynek, że żadne dwie jedynki nie będą sąsiadowały, zaś na $i-1$ miejscu od prawej wystąpi jedynka wtedy i tylko wtedy, gdy liczba F_i występuje w rozwinięciu z twierdzenia Zeckendorfa. Dla przykładu
$$50 = 34 + 13 + 3 = (10100100)_F.$$
Algorytm zamiany liczb na układ Fibonacciego jest prosty: należy do rozkładu brać jak największe liczby Fibonacciego, na które jest jeszcze miejsce.

Ponieważ każda liczba Fibonacciego F_n ma rozkład $1\underbrace{00\ldots000}_{n-2 \text{ zer}}$, więc jest jasne, że musimy umieć zapisać liczby mniejsze od F_n (łącznie z zerem jest ich F_n) na $n-2$ pozycjach. Przypomnijmy sobie, ile jest takich ciągów zerojedynkowych o $n-2$ elementach, że żadne dwie jedynki nie występują koło siebie. Oczywiście, jest ich tyle, ile jest posadzeń pań (jedynek) i panów (zer) na ławie przy $n-2$ nakryciach tak, aby żadne dwie panie ze sobą nie sąsiadowały, czyli właśnie F_n. Wykazaliśmy więc, że na $n-2$ pozycjach jest wystarczająco dużo miejsca do reprezentacji F_n liczb za pomocą „eleganckich" ciągów zerojedynkowych. Aby udowodnić twierdzenie Zeckendorfa, wystarczy wykazać, że po pierwsze

- maksymalną liczbą reprezentowalną na $n-2$ pozycjach w układzie Fibonacciego jest $F_n - 1$, a po drugie - że każde dwa różne „eleganckie" ciągi zerojedynkowe wyznaczają różne liczby w układzie Fibonacciego. Elementarne te fakty pozostawiamy bez dowodu, aby nie psuć do końca Czytelnikowi przyjemności odkrywania praw dotyczących liczb Fibonacciego.

W każdym w miarę normalnym układzie pozycyjnym do przyjemności należy wykonywanie działań sprowadzających się do dopisywania zer na końcu liczb bądź skreślania tych najmniej znaczących cyfr. Odpowiada to zazwyczaj mnożeniu i dzieleniu przez bazę układu. Czemu odpowiadają te operacje na liczbach w układzie Fibonacciego? Oczywiście, przesunięciu indeksów o jeden w prawo lub w lewo. Ze względu na to, że $F_{n+1} \simeq \phi F_n$, dopisanie zera na końcu liczby będzie odpowiadało pomnożeniu, a skreślenie ostatniej cyfry - podzieleniu przez wartość bliską ϕ. Spytamy się natychmiast, do czego może się przydać mnożenie i dzielenie przez ϕ?

Okazuje się, że całkowicie przypadkowo jedna mila angielska to 1,609344 km, podczas gdy $\phi \simeq 1,618034$ - czyli bardzo podobnie. Możemy więc użyć tej niezwykłej reprezentacji do szybkiej przybliżonej zamiany kilometrów na mile i na odwrót. Dla przykładu: jedziemy samochodem po autostradzie w Stanach Zjednoczonych i widzimy ograniczenie do 55 mil (bardzo częste ograniczenie). Szybko rozwijamy 55 w układzie Fibonacciego (akurat 55 jest dziesiątą liczbą Fibonacciego) i przesuwamy o 1 dostając 89 km. Błąd - mniejszy od 0,5. Na odwrót - chcemy się dowiedzieć, ile to jest w milach 30 km? Proszę bardzo! $30 = 21 + 8 + 1$. Bierzemy liczby Fibonacciego z indeksami o 1 mniejszymi, czyli $13 + 5 + 1 = 19$ mil (przy tej metodzie ostatnią jedynkę zostawiamy ze względu na to, że $F_1 = 1$).

Inna, bardzo ciekawa własność liczb Fibonacciego dotyczy ich podzielności:

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)},$$

czyli - innymi słowy - największy wspólny dzielnik dwóch liczb Fibonacciego jest również liczbą Fibonacciego o indeksie równym największemu wspólnemu dzielnikowi ich indeksów. Twierdzenie to zostało użyte w 1970 roku przez Jurija Matiasewicza przy dowodzie bardzo ważnego twierdzenia mówiącego, że nie

Czy matematyk musi być ateistą?

W literaturze polskiej (i w ogóle słowiańskiej) końca XIX wieku i pierwszej połowy XX wieku dość często trafiającym się sztafażem jest małe miasteczko. Warto przywołać i dziś jego obraz przed oczy, a to dlatego, że wracać przecież mamy do dawnych, dobrych, sprawdzonych sytuacji, a jeszcze bardziej dlatego, że już za dwa lata oświata przestanie wreszcie ciążyć na barkach państwa i będzie w rękach gmin (a więc w przeważającej części właśnie małych miasteczek).

Z bogatego, kolorowego pejzażu Iksinowów, P-sków czy jak tam im było, chcę przywołać tylko jeden element. Otóż częstym składnikiem takiego małomiasteczkowego życia była malutka grupka miejscowych ateistów. Jeśli wierzyć literaturze, należał tam przeważnie (z niewiadomych powodów) szewc, aptekarz, rzadziej lekarz i bardzo często matematyk - profesor miejscowego gimnazjum. Zbierali się owi ateiści u któregoś z nich i, jak sądziła miejscowa społeczność, przeważnie raczyli się różnymi nalewkami. Autorzy opisujący tę prowincję mieli do powoływanych przez siebie do życia ateistów stosunek pełen pobłażliwej życzliwości, a to głównie dlatego, że w dobrym tonie było potępianie dewocji i chwalenie wszystkiego, co się jej przeciwstawiało.

Oderwijmy się jednak od minionej rzeczywistości prowincjonalnej i zastanówmy się, dlaczego wśród ateistów tak chętnie wymieniany był matematyk (o ile pamiętam, ten z *Szatana z siódmej klasy* też ma ten grzech na sumieniu)? A może rzeczywiście było coś takiego, co prowincjonalnego matematyka ku ateizmowi popychało?

Istotnie, coś takiego było. Autorem owego czegoś był żyjący sto lat wcześniej od naszych bohaterów Pierre Simon (de) Laplace. Napisałem de w nawiasie nie bez powodu. Laplace był bowiem charakterologicznie (przepraszam za rusycyzm) bohaterem naszych czasów. Już na studiach zaskarbił sobie uznanie d'Alemberta (a więc ówczesnej opozycji), co dało mu profesurę w szkole wojskowej w Paryżu, by wystartować stamtąd do funkcji urzędniczych przy Ludwiku XVI. Podczas rewolucji (jako syn **drobnego** właściciela ziemskiego) organizował z Lagrange'm Ècole Normale i Ècole Polytechnique, by potem stać się ulubionym uczonym Napoleona i następnie (jako syn drobnego **właściciela ziemskiego**) Ludwika XVIII. Słowem *łatwość zmiany przekonań ułatwiła mu uprawianie czysto matematycznej działalności niezależnie od zmian politycznych* (to cytat ze Struika).

To, co nas tu interesuje, zawarte jest w jego monumentalnym dziele *Mècanique celeste*, a można to zaprezentować cytatem: *Inteligencja, która by w danym momencie znała wszystkie siły ożywiające naturę oraz wzajemne położenia bytów tworzących ją i przy tym byłaby dostatecznie wielka, by dane te poddać analizie, mogłaby w jednym wzorze objąć ruch największych ciał Wszechświata i najmniejszych atomów: nic nie byłoby dla niej niepewne i miałaby przed oczyma zarówno przyszłość, jak przeszłość. Umysł ludzki daje słabe pojęcie o tej inteligencji, której doskonałość można było osiągnąć tylko w astronomii.*

Cytat ten nie wydaje się wyznaniem wiary ateisty. A jednak (zupełnie bez intencji autora) stał się wyznaniem wiary konsekwentnie ateistycznego ruchu filozoficznego, który zwie się determinizmem. Jeśli bowiem pełna znajomość stanu rzeczy pozwala (to nieważne, że nie nam) przewidzieć wszystko i to dowolnie dokładnie, to wśród jednoznacznie zdeterminowanych obiektów znaleźć się musimy i my sami. A tym samym nasza dusza nieśmiertelna istnieć nie może, gdyż pozbawiona wolnej woli (jako zdeterminowana) byłaby obiektem śmiechu wartym. Nie ponosilibyśmy żadnej odpowiedzialności za nasze grzechy, bo byłyby one na nas wymuszone przez nieuniknioną konieczność itd.

Determinizm, jako kierunek intelektualny, cieszył się sporym wzięciem wśród uczonych drugiej połowy XIX wielu (szczególnie wśród matematyków i fizyków stosujących jego najsprawniejsze narzędzia – równania różniczkowe i mechanikę analityczną). I zgasł z końcem stulecia, gdy jego wielbiciele bądź wymarli, bądź zdali sobie jasno sprawę, że grzeszą najcięższym grzechem w religiach judejsko-chrześcijańskich, czyli pychą (dla tej części w 98% katolickiej publiczności, która nie wie, że pycha jest najcięższym grzechem, objaśniam, że za to szatan został wykluczony z grona aniołów i strącony z Nieba).

Jednak w naszych prowincjonalnych miasteczkach (podwójnie prowincjonalnych, bo w Europie Wschodniej) determinizm przetrwał, i to za sprawą matematyków, o pół stulecia dłużej.

Tak więc nie martwmy się. Matematyk (nawet uprawiający równania różniczkowe) nie musi być ateistą. Wystarczy tylko, by uwierzył, że on i jego matematyka nie są w stanie przy żadnej bazie danych i przy żadnej mocy obliczeniowej objaśnić całości świata. Tylko, czy taka rezygnacja z potencjalnych choćby możliwości uprawianej nauki nie okalecza człowieka bardziej niż ateizm?

Marek KORDOS

istnieje algorytm pozwalający na sprawdzenie, czy dane równanie algebraiczne o współczynnikach całkowitych (dowolnej liczby zmiennych i dowolnego stopnia) ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. Twierdzenie to jest negatywnym rozwiązaniem dziesiątego problemu Hilberta.

Teraz, kiedy już chyba zgodzimy się, że liczby Fibonacciego są ciekawe, a poza tym rozwiązania całkiem normalnych problemów wyrażają się wygodnie za ich pomocą, powstaje pytanie, czy rzeczywiście nie ma jakiegoś sposobu, aby wprost, bez rekurencji, móc obliczyć n-tą liczbę Fibonacciego?

Otóż już w XIX wieku został udowodniony przez J. Bineta przyprawiający o zawrót głowy wzór

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)$$

Aż trudno uwierzyć, że wzór ten może w wyniku dawać dla każdego n liczby naturalne.

Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 622. Na okręgu napisano 50 liczb. Każda z nich jest równa 1 lub -1. Należy obliczyć ich iloczyn zadając pytania o iloczyny trzech kolejnych liczb. Jaką najmniejszą liczbę pytań trzeba zadać?
Rozwiązanie na str. 12

M 623. Na rzece o szerokości 100 m (brzegi rzeki są liniami prostymi) znajduje się pewna liczba wysp o łącznym obwodzie 800 m. Udowodnić, że ruszając z dowolnego punktu na jednym brzegu można przepłynąć łódką na drugi brzeg po drodze nie dłuższej niż 300 m.
Rozwiązanie na str. 12

M 624. Na obwodnicy (droga w kształcie pętli) znajduje się pewna liczba stacji benzynowych zawierających w sumie ilość paliwa wystarczającą dla zrobienia samochodem jednej pętli. Udowodnić, że istnieje taka stacja, że podstawiony pod nią samochód z pustym bakiem będzie mógł przejechać całą obwodnicę.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 327. Oszacuj, ile razy średnia droga swobodna s elektronu w miedzi w temperaturze $t = 20°\mathrm{C}$ jest większa od odległości między najbliższymi atomami. Dane dotyczące miedzi: gęstość $d = 9 \cdot 10^3$ kg/m^3, opór właściwy $\rho = 1,55 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\cdot$m, masa molowa $\mu = 0,064$ kg/m^3, sieć jest płasko centrowana (cztery atomy na komórkę).
Rozwiązanie na str. 11

F 328. Oceń rząd wielkości minimalnej prędkości v, jaką mogą mieć jony chloru w krysztale soli kuchennej w pobliżu temperatury zera bezwzględnego. Stała sieci NaCl: $a = 5,6$ Å, masa molowa Cl: $\mu = 0,035$ kg/mol.
Rozwiązanie na str. 12