epsilon

2/92 (12)

Gdy symbol nieoznaczony

Gdy symbol nieoznaczony
Liczyć granic nie pozwala
To najlepiej jest skorzystać
Z reguły de l'Hospitala

Ludolfina

Czy chcąc otworzyć konserwę używamy w tym celu lasera gazowego dużej mocy? Do rzadkości należy próba zabicia muchy, brzęczącej na szybie, za pomocą wiertarki elektrycznej. Chorego na lekki katar nie wysyłamy od razu do szpitala...

szpital – po francusku l'hospital

Reguła de l'Hospitala jest wielce przydatnym, ale i bardzo subtelnym twierdzeniem. Przypomnijmy: Dane są funkcje f i g określone na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych, o wartościach w $\mathbf{R}$, różniczkowalne w sąsiedztwie liczby p (zamiast liczby można rozważać $p = \infty$, a sąsiedztwo może być jednostronne), przy czym $g'(t) \neq 0$ dla dowolnego t z sąsiedztwa. Jeśli $\lim\limits_{t\to p} f(t) = \lim\limits_{t\to p} g(t) = 0$ (albo ∞) i jeśli istnieje granica (może być niewłaściwa) $\lim\limits_{t\to p} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \alpha$, to $\lim\limits_{t\to p} \frac{f(t)}{g(t)} = \alpha$.

Propozycja sugerowana w zacytowanym jako motto wierszyku Ludolfiny nie jest zbyt dobra. Dlaczego? Dla osób z niewielkim doświadczeniem matematycznym użycie tak potężnego i delikatnego narzędzia wiąże się z dużym ryzykiem.

Po zaznajomieniu się z regułą de l'Hospitala niejeden będzie próbował obliczać za jej pomocą każdą prawie granicę. A czy należy rozwiązywać zadanie przy użyciu potężnej „machiny matematycznej" w sytuacji, gdy można to zrobić zupełnie elementarnie? Ponadto, jeśli korzysta się z jakiegoś twierdzenia, to należy dokładnie znać jego sformułowanie, a w szczególności założenia. W twierdzeniu de l'Hospitala obok efektownej tezy istnieje cała lista drobnych, lecz istotnych założeń – które niewątpliwie należy sprawdzić przed zastosowaniem reguły. Dodajmy, że istnieją matematycy, którzy uważają (niejednokrotnie nie bez racji), że korzystając z jakiegoś twierdzenia wypada wcześniej zaznajomić się z jego dowodem. A dowód reguły de l'Hospitala nie jest prosty...

Przy zbyt pochopnym stosowaniu reguły de l'Hospitala łatwo o „wypadek przy pracy". Przed czym warto przestrzec?

1) Obliczając granicę, można „z rozpędu" napisać:

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots$$

A to przecież nie zawsze jest prawdą! Co dokładnie mówi twierdzenie? Można w ten sposób np. dojść do wniosku, że funkcja: $x \to \frac{x+\sin x}{x}$ nie ma granicy przy x dążącym do nieskończoności, bo po odpowiednim zróżniczkowaniu otrzymamy $\frac{1+\cos x}{1}$...

2) Aż się prosi, by obliczając granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ zastosować regułę de l'Hospitala i zróżniczkować licznik i mianownik. Ale zaraz, zaraz! Ile wynosi pochodna funkcji sinus? To nie jest trudne, wzór można wyprowadzić z definicji pochodnej. No to wyprowadzamy i musimy po drodze skorzystać z faktu, że ... $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Błędne koło!

3) Mamy zbadać $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3 \ln n + (\ln n)^2}$. Niektórzy zastosują tu regułę de l'Hospitala. Czy wolno jednak różniczkować ciągi? Nawet jeśli można „podprowadzić" problem pod odpowiednie twierdzenie, to należy to uzasadnić – i rozwiązując zadanie, wystrzegać się zapisu typu: $(n^2+1)'$.

4) Obliczmy granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 \cos^2 x}{x^3 + \sin^3 x}$. Po chwili zastanowienia zauważymy, że wystarczy licznik i mianownik podzielić przez x^3, a wynik otrzymamy błyskawicznie. Zagorzałym zwolennikom reguły de l'Hospitala życzymy miłego różniczkowania (i to nie raz!).

5) A teraz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}(x+2)^2}$. Wzory na pochodne funkcji arctg są znane (i doprowadzają do miłych wielomianów), więc dlaczego ich nie wykorzystać – rachunki szybko dadzą wynik. Tyle że błędny... Dlaczego?

6) Przykład, w którym aż się prosi o zróżniczkowanie: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(2-x)}{\ln(x-2)}$. Mamy $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{-1}{2-x}}{\frac{1}{x-2}} = 1$. Rozumowanie to zawiera jednak poważny błąd. Gdzie?

7) Pomyłka, która jest niejako konsekwencją częstego, nawet poprawnego, stosowania reguły de l'Hospitala. Trzeba zróżniczkować iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$. Może pojawić się równość

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nie strzelajmy z armaty do wróbli. Jeśli mamy otworzyć konserwę, to przede wszystkim używajmy otwieracza. Gdy zadanie nie wygląda na zbyt trudne, spróbujmy najpierw poradzić sobie z nim za pomocą metod najprostszych. A laser i inne subtelne narzędzia niewątpliwie się przydadzą, i to nie raz... Przed ich użyciem zapoznajmy się jednak z instrukcją obsługi!

Krzysztof CIESIELSKI, Zdzisław POGODA

Galeria Jednego Cytatu

„Przy brzegu może zachowywać się paskudnie"
(z wykładu dla studentów matematyki)

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.