- maksymalną liczbą reprezentowalną na $n-2$ pozycjach w układzie Fibonacciego jest $F_n - 1$, a po drugie - że każde dwa różne „eleganckie" ciągi zerojedynkowe wyznaczają różne liczby w układzie Fibonacciego. Elementarne te fakty pozostawiamy bez dowodu, aby nie psuć do końca Czytelnikowi przyjemności odkrywania praw dotyczących liczb Fibonacciego.

W każdym w miarę normalnym układzie pozycyjnym do przyjemności należy wykonywanie działań sprowadzających się do dopisywania zer na końcu liczb bądź skreślania tych najmniej znaczących cyfr. Odpowiada to zazwyczaj mnożeniu i dzieleniu przez bazę układu. Czemu odpowiadają te operacje na liczbach w układzie Fibonacciego? Oczywiście, przesunięciu indeksów o jeden w prawo lub w lewo. Ze względu na to, że $F_{n+1} \simeq \phi F_n$, dopisanie zera na końcu liczby będzie odpowiadało pomnożeniu, a skreślenie ostatniej cyfry - podzieleniu przez wartość bliską ϕ. Spytamy się natychmiast, do czego może się przydać mnożenie i dzielenie przez ϕ?

Okazuje się, że całkowicie przypadkowo jedna mila angielska to 1,609344 km, podczas gdy $\phi \simeq 1,618034$ - czyli bardzo podobnie. Możemy więc użyć tej niezwykłej reprezentacji do szybkiej przybliżonej zamiany kilometrów na mile i na odwrót. Dla przykładu: jedziemy samochodem po autostradzie w Stanach Zjednoczonych i widzimy ograniczenie do 55 mil (bardzo częste ograniczenie). Szybko rozwijamy 55 w układzie Fibonacciego (akurat 55 jest dziesiątą liczbą Fibonacciego) i przesuwamy o 1 dostając 89 km. Błąd - mniejszy od 0,5. Na odwrót - chcemy się dowiedzieć, ile to jest w milach 30 km? Proszę bardzo! $30 = 21 + 8 + 1$. Bierzemy liczby Fibonacciego z indeksami o 1 mniejszymi, czyli $13 + 5 + 1 = 19$ mil (przy tej metodzie ostatnią jedynkę zostawiamy ze względu na to, że $F_1 = 1$).

Inna, bardzo ciekawa własność liczb Fibonacciego dotyczy ich podzielności:

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)},$$

czyli - innymi słowy - największy wspólny dzielnik dwóch liczb Fibonacciego jest również liczbą Fibonacciego o indeksie równym największemu wspólnemu dzielnikowi ich indeksów. Twierdzenie to zostało użyte w 1970 roku przez Jurija Matiasewicza przy dowodzie bardzo ważnego twierdzenia mówiącego, że nie

Czy matematyk musi być ateistą?

W literaturze polskiej (i w ogóle słowiańskiej) końca XIX wieku i pierwszej połowy XX wieku dość często trafiającym się sztafażem jest małe miasteczko. Warto przywołać i dziś jego obraz przed oczy, a to dlatego, że wracać przecież mamy do dawnych, dobrych, sprawdzonych sytuacji, a jeszcze bardziej dlatego, że już za dwa lata oświata przestanie wreszcie ciążyć na barkach państwa i będzie w rękach gmin (a więc w przeważającej części właśnie małych miasteczek).

Z bogatego, kolorowego pejzażu Iksinowów, P-sków czy jak tam im było, chcę przywołać tylko jeden element. Otóż częstym składnikiem takiego małomiasteczkowego życia była malutka grupka miejscowych ateistów. Jeśli wierzyć literaturze, należał tam przeważnie (z niewiadomych powodów) szewc, aptekarz, rzadziej lekarz i bardzo często matematyk - profesor miejscowego gimnazjum. Zbierali się owi ateiści u któregoś z nich i, jak sądziła miejscowa społeczność, przeważnie raczyli się różnymi nalewkami. Autorzy opisujący tę prowincję mieli do powoływanych przez siebie do życia ateistów stosunek pełen pobłażliwej życzliwości, a to głównie dlatego, że w dobrym tonie było potępianie dewocji i chwalenie wszystkiego, co się jej przeciwstawiało.

Oderwijmy się jednak od minionej rzeczywistości prowincjonalnej i zastanówmy się, dlaczego wśród ateistów tak chętnie wymieniany był matematyk (o ile pamiętam, ten z *Szatana z siódmej klasy* też ma ten grzech na sumieniu)? A może rzeczywiście było coś takiego, co prowincjonalnego matematyka ku ateizmowi popychało?

Istotnie, coś takiego było. Autorem owego czegoś był żyjący sto lat wcześniej od naszych bohaterów Pierre Simon (de) Laplace. Napisałem de w nawiasie nie bez powodu. Laplace był bowiem charakterologicznie (przepraszam za rusycyzm) bohaterem naszych czasów. Już na studiach zaskarbił sobie uznanie d'Alemberta (a więc ówczesnej opozycji), co dało mu profesurę w szkole wojskowej w Paryżu, by wystartować stamtąd do funkcji urzędniczych przy Ludwiku XVI. Podczas rewolucji (jako syn **drobnego** właściciela ziemskiego) organizował z Lagrange'm Ècole Normale i Ècole Polytechnique, by potem stać się ulubionym uczonym Napoleona i następnie (jako syn drobnego **właściciela ziemskiego**) Ludwika XVIII. Słowem *łatwość zmiany przekonań ułatwiła mu uprawianie czysto matematycznej działalności niezależnie od zmian politycznych* (to cytat ze Struika).

To, co nas tu interesuje, zawarte jest w jego monumentalnym dziele *Mècanique celeste*, a można to zaprezentować cytatem: *Inteligencja, która by w danym momencie znała wszystkie siły ożywiające naturę oraz wzajemne położenia bytów tworzących ją i przy tym byłaby dostatecznie wielka, by dane te poddać analizie, mogłaby w jednym wzorze objąć ruch największych ciał Wszechświata i najmniejszych atomów: nic nie byłoby dla niej niepewne i miałaby przed oczyma zarówno przyszłość, jak przeszłość. Umysł ludzki daje słabe pojęcie o tej inteligencji, której doskonałość można było osiągnąć tylko w astronomii.*

Cytat ten nie wydaje się wyznaniem wiary ateisty. A jednak (zupełnie bez intencji autora) stał się wyznaniem wiary konsekwentnie ateistycznego ruchu filozoficznego, który zwie się determinizmem. Jeśli bowiem pełna znajomość stanu rzeczy pozwala (to nieważne, że nie nam) przewidzieć wszystko i to dowolnie dokładnie, to wśród jednoznacznie zdeterminowanych obiektów znaleźć się musimy i my sami. A tym samym nasza dusza nieśmiertelna istnieć nie może, gdyż pozbawiona wolnej woli (jako zdeterminowana) byłaby obiektem śmiechu wartym. Nie ponosilibyśmy żadnej odpowiedzialności za nasze grzechy, bo byłyby one na nas wymuszone przez nieuniknioną konieczność itd.

Determinizm, jako kierunek intelektualny, cieszył się sporym wzięciem wśród uczonych drugiej połowy XIX wieku (szczególnie wśród matematyków i fizyków stosujących jego najsprawniejsze narzędzia – równania różniczkowe i mechanikę analityczną). I zgasł z końcem stulecia, gdy jego wielbiciele bądź wymarli, bądź zdali sobie jasno sprawę, że grzeszą najcięższym grzechem w religiach judejsko-chrześcijańskich, czyli pychą (dla tej części w 98% katolickiej publiczności, która nie wie, że pycha jest najcięższym grzechem, objaśniam, że za to szatan został wykluczony z grona aniołów i strącony z Nieba).

Jednak w naszych prowincjonalnych miasteczkach (podwójnie prowincjonalnych, bo w Europie Wschodniej) determinizm przetrwał, i to za sprawą matematyków, o pół stulecia dłużej.

Tak więc nie martwmy się. Matematyk (nawet uprawiający równania różniczkowe) nie musi być ateistą. Wystarczy tylko, by uwierzył, że on i jego matematyka nie są w stanie przy żadnej bazie danych i przy żadnej mocy obliczeniowej objaśnić całości świata. Tylko, czy taka rezygnacja z potencjalnych choćby możliwości uprawianej nauki nie okalecza człowieka bardziej niż ateizm?

Marek KORDOS

istnieje algorytm pozwalający na sprawdzenie, czy dane równanie algebraiczne o współczynnikach całkowitych (dowolnej liczby zmiennych i dowolnego stopnia) ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. Twierdzenie to jest negatywnym rozwiązaniem dziesiątego problemu Hilberta.

Teraz, kiedy już chyba zgodzimy się, że liczby Fibonacciego są ciekawe, a poza tym rozwiązania całkiem normalnych problemów wyrażają się wygodnie za ich pomocą, powstaje pytanie, czy rzeczywiście nie ma jakiegoś sposobu, aby wprost, bez rekurencji, móc obliczyć n-tą liczbę Fibonacciego?

Otóż już w XIX wieku został udowodniony przez J. Bineta przyprawiający o zawrót głowy wzór

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)$$

Aż trudno uwierzyć, że wzór ten może w wyniku dawać dla każdego n liczby naturalne.

Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 622. Na okręgu napisano 50 liczb. Każda z nich jest równa 1 lub -1. Należy obliczyć ich iloczyn zadając pytania o iloczyny trzech kolejnych liczb. Jaką najmniejszą liczbę pytań trzeba zadać?
Rozwiązanie na str. 12

M 623. Na rzece o szerokości 100 m (brzegi rzeki są liniami prostymi) znajduje się pewna liczba wysp o łącznym obwodzie 800 m. Udowodnić, że ruszając z dowolnego punktu na jednym brzegu można przepłynąć łódką na drugi brzeg po drodze nie dłuższej niż 300 m.
Rozwiązanie na str. 12

M 624. Na obwodnicy (droga w kształcie pętli) znajduje się pewna liczba stacji benzynowych zawierających w sumie ilość paliwa wystarczającą dla zrobienia samochodem jednej pętli. Udowodnić, że istnieje taka stacja, że podstawiony pod nią samochód z pustym bakiem będzie mógł przejechać całą obwodnicę.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 327. Oszacuj, ile razy średnia droga swobodna s elektronu w miedzi w temperaturze $t = 20^\circ$C jest większa od odległości między najbliższymi atomami. Dane dotyczące miedzi: gęstość $d = 9 \cdot 10^3$ kg/m^3, opór właściwy $\rho = 1,55 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\cdot$m, masa molowa $\mu = 0,064$ kg/m^3, sieć jest płasko centrowana (cztery atomy na komórkę).
Rozwiązanie na str. 11

F 328. Oceń rząd wielkości minimalnej prędkości v, jaką mogą mieć jony chloru w krysztale soli kuchennej w pobliżu temperatury zera bezwzględnego. Stała sieci NaCl: $a = 5,6$ Å, masa molowa Cl: $\mu = 0,035$ kg/mol.
Rozwiązanie na str. 12