Kwant krętu pola elektromagnetycznego

Jerzy DRYZEK

Poniższy artykuł opatrzyliśmy komentarzem redakcyjnym. Zaznaczyliśmy miejsca artykułu, do których komentarz się odnosi.

Pole elektromagnetyczne (EM), będące obiektem fizycznym, ma wszystkie jego atrybuty; ma masę, pęd, a także moment pędu. Ten ostatni w odniesieniu do tego pola może być niejednokrotnie źródłem paradoksalnych zachowań układów fizycznych. Okazuje się bowiem, że izolowany układ może mieć moment pędu będąc w spoczynku, a za sprawą zasady zachowania momentu pędu może zostać wprawiony w ruch po wyłączeniu pola magnetycznego bądź elektrycznego w tym układzie. Jako przykład niech służy tzw. dysk Feynmana opisany w drugim tomie jego popularnych wykładów. Uświadomienie sobie, że taki moment pędu istnieje, pozwala czasami znacznie uprościć nasze rozumienie zjawisk elektromagnetycznych. Oto, na przykład, diamagnetyzm materii uważać można za konsekwencję zasady zachowania momentu pędu – oczywiście – po uwzględnieniu krętu pola EM.

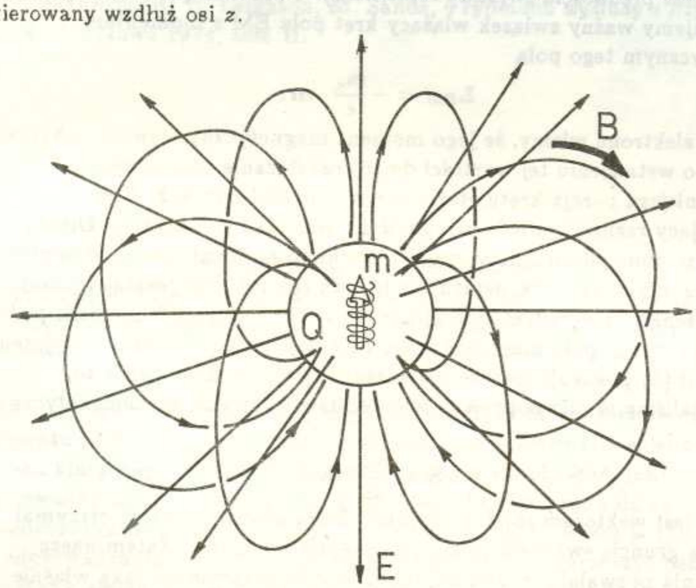
Kręt pola EM wyraża się wzorem

$$\mathbf{L}_{EM} = \varepsilon_0 \cdot \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, dv, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{E}$ jest wektorem natężenia pola elektrycznego, a $\mathbf{B}$ jest wektorem indukcji pola magnetycznego w punkcie $\mathbf{r}$, ε_0 jest przenikalnością dielektryczną próżni.

Interesujące ze wszech miar jest pytanie o kwant, o najmniejszą porcję tego właśnie momentu pędu, bo przecież intuicyjnie wydaje się oczywiste, że musi on istnieć. W swoim artykule (*Delta* 10/1986, str. 14) zawarłem sugestię, która wydawała się rozsądna, że foton, a dokładniej jego spin, realizuje właśnie tę najmniejszą porcję $\mathbf{L}_{EM}$, czyli że wynosi ona $\hbar$ (stała Plancka podzielona przez 2π). Niestety, wbrew zdrowemu rozsądkowi, okazuje się to nieprawdą.

Rozpatrzmy następujący układ fizyczny: niech na nieruchomej sferze o promieniu R rozłożony będzie równomiernie ładunek elektryczny Q, w środku tej sfery niech będzie umieszczony magnetyczny moment dipolowy $\mathbf{m}$ (wytworzony np. przez niewielką cewkę zasilaną baterią), skierowany wzdłuż osi z.



Rys. 1. Rozkład pola elektrycznego i magnetycznego wokół naładowanej sfery z momentem magnetycznym w jej środku.

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (II)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Przyspieszamy, a nie zwiększamy prędkości

Tomasz HOFMOKL

Poprzednim razem opisywałem Państwu najprostsze zjawiska, których przebieg jest dziś dla nas oczywisty, a które przeczyły zdrowemu rozsądkowi starożytnych uczonych. Cykl naszych artykułów jest poświęcony tym doświadczeniom, które wydają się przeczyć pojęciu tego, co jest możliwe i tym samym zmuszają nas do rozszerzenia naszej wiedzy o świecie.

Wydaje się, że już w tytule artykułu jest jakaś sprzeczność. Czy można przyspieszać, a jednocześnie nie zwiększać prędkości? Wydaje się, że jest to niemożliwe. A jednak ...

Zacznę od bardzo prostego doświadczenia, które w dzieciństwie większość z nas na pewno przeprowadzała po prostu w trakcie zabawy. Mam na myśli puszczanie samolotów z papieru. Ale chciałbym odwołać się do zabaw na świeżym powietrzu i to w wietrzny dzień. Samolot rzucony z wiatrem pięknie i daleko szybował. Puszczony zaś pod wiatr leciał wolno w stosunku do ziemi i po chwili zawracał. Nie było więc obojętne dla prędkości samolotu względem rzucającego, czy start odbywał się pod wiatr czy z wiatrem. Wydaje się to oczywiste. Można nawet sobie wyobrazić, że mierząc prędkość tak samo rzucanego samolotu względem ziemi w przypadku rzutu pod wiatr i z wiatrem można by wyznaczyć prędkość wiatru. Nie jest to, oczywiście, najbardziej praktyczny sposób pomiaru prędkości wiatru, ale zawsze, jakby się ktoś uparł, to taki pomiar może przeprowadzić.

O takim właśnie pomiarze chcę mówić, ponieważ jego wynik zaskoczył tych, którzy go wykonali, tak dalece był sprzeczny z tym, czego można było oczekiwać. Nie był to pomiar prędkości papierowego samolocika rzucanego z wiatrem i pod wiatr, lecz pomiar prędkości światła biegnącego w wietrze eterowym. Tu, oczywiście, należy się parę słów wyjaśnienia.

Pierwszym fizykiem, który zastanawiał się nad możliwością eksperymentalnego sprawdzenia, czy prędkość światła jest nieskończona czy skończona, był Galileusz. Wspomina o próbie takiego doświadczenia w pracy *Dialogi i dowodzenia matematyczne* wydanej w Lejdzie w 1638 r. Na dwóch odległych wzgórzach ustawili się ludzie z latarniami. Gdy jeden odsłonił latarnię, promień światła wędrował do jego towarzysza na drugim wzgórzu i gdy ten zobaczył jej światło, natychmiast odsłaniał swoją latarnię. Pierwszy obserwator mógłby na podstawie opóźnienia w widzianym błysku wyznaczyć prędkość światła. Doświadczenie nie przyniosło wyniku, bo metodą zastosowaną nie można było zmierzyć tak wielkiej prędkości sygnału. Pierwszym, który zmierzył prędkość światła, był duński astronom Olaus Roemer, który w 1676 r., pracując w obserwatorium paryskim badał zaćmienia satelity Jowisza o nazwie Io. Z jego pomiarów wynikło, że prędkość światła wynosi 214 tysięcy km na sekundę. Wartość ta odbiega od znanej dziś wartości, która jest bliska trzystu tysiącom kilometrów na sekundę, ale pamiętajmy, że było to pierwsze stwierdzenie, iż prędkość ta, jakkolwiek bardzo duża, jest skończona.

Tu się właściwie zaczyna nasza historia. Dowiadujemy się, że światło ma skończoną prędkość. Nasuwa się od razu pytanie: w czym światło się rozchodzi? Przenieśmy się od razu w dziewiętnasty wiek. Nie wchodząc w szczegóły ówczesnych poglądów na naturę światła przypomnimy tylko, że w większości teorii tłumaczących rozchodzenie się światła zakładano istnienie eteru – hipotetycznego ośrodka przenikającego wszystko i rozciągającego się wszędzie, nawet w próżni. Opierając się na dotychczasowych doświadczeniach rozumowano przez analogię. Głos może rozchodzić się tylko w jakimś ośrodku, na przykład w powietrzu lub w wodzie. Fale na jeziorze mają też swój ośrodek, w którym biegną. Jeżeli światło się rozchodzi, to musi istnieć ośrodek, który je przenosi.

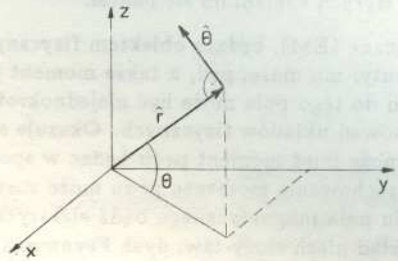
Ten hipotetyczny eter musiałby mieć niezwykłe właściwości, musiałby być bardzo sprężysty, bo inaczej światło nie mogłoby biec tak prędko, a równocześnie nie mógłby stawiać oporu w ruchu planet. Eter wiązano z absolutną nieruchomą przestrzenią mechaniki Newtona i w pewnym sensie był on jej materializacją.

Wiedziano, że Ziemia pędzi w przestworzach w ruchu wokół Słońca z prędkością około 30 km/s. Na Ziemi wieje więc huragan eteru, którego my wprawdzie nie odczuwamy, ale delikatne światło, dla którego eter jest nośnikiem,

Obliczmy teraz moment pędu pola EM w tak skonstruowanym układzie. We wnętrzu sfery pole elektryczne jest równe zeru, zatem interesujące dla nas będzie zachowanie się pola **E** i **B** poza sferą. I tak pole elektryczne i magnetyczne dla $r > R$ będą równe

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\mathbf{m}}{r^3}\cdot\left(2\cos\theta\cdot\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\cdot\widehat{\theta}\right), \tag{2}$$

gdzie $\hat{\mathbf{r}}$ i $\widehat{\theta}$ są wersorami skierowanymi odpowiednio w kierunku wektora **r** i prostopadle do niego w kierunku wzrostu kąta θ, a μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.



Rys. 2

Wektor Poyntinga, czyli strumień energii poza sferą, jest równy

$$\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{Q\mathbf{m}}{(4\pi)^2\varepsilon_0 r^5}\cdot\sin\theta\cdot\widehat{\phi}, \tag{3}$$

gdzie ϕ jest wersorem skierowanym w kierunku wzrostu kąta ϕ. Podstawiając powyższe do (1) i zauważając, że ze względu na symetrię pól tylko składowa w kierunku z wniesie wkład do $\mathbf{L}_{EM}$, otrzymujemy

$$\mathbf{L}_{EM} = \frac{\mu_0\mathbf{m}Q}{(4\pi)^2}\cdot\int_R^\infty \mathrm{d}r\cdot\int_0^\pi r^2\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{r^5}\right)2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\mathbf{m}Q}{3R}. \tag{4}$$

Obliczony moment pędu odnosi się tylko do statycznego pola EM i gdyby teraz w jakiś sposób odprowadzić ładunek Q lub przerwać dopływ prądu do cewki wytwarzającej moment magnetyczny, to sfera zacznie się obracać wokół osi z, a jej mechaniczny moment pędu, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, będzie równy $\mathbf{L}_{EM}$ (*komentarz*).

Niech nasza sfera wyobraża klasyczny model elektronu. Wówczas $Q = -e$, masa zaś elektronu m_e (pomnożona przez c^2) równa jest jego energii elektrostatycznej. Klasyczny promień takiego elektronu będzie równy

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{m_e c^2}, \tag{5}$$

gdzie c jest prędkością światła (*komentarz*). Podstawiając (5) do (4) otrzymujemy ważny związek wiążący kręt pola EM z momentem magnetycznym tego pola

$$\mathbf{L}_{EM} = -\frac{m_e}{e}\cdot\mathbf{m}. \tag{6}$$

Z teorii elektronu wiemy, że jego moment magnetyczny wynosi $-e\hbar/(2m_e)$, zatem po wstawieniu tej wartości do (6) ostatecznie otrzymujemy, że najmniejszą porcją krętu statycznego pola EM jest $\hbar/2$. Ten zaskakujący rezultat można otrzymać i z warunku kwantyzacji Diraca angażując monopol magnetyczny, i z warunku na kwantyzację strumienia pola magnetycznego. Skonstatujmy jednak ten rezultat jeszcze inaczej. Otóż w sensie klasycznym spin elektronu to nic innego jak moment pędu jego statycznego pola magnetycznego i elektrycznego. Uważne przyjrzenie się relacji (6) pokazuje jeszcze coś zaskakującego, a mianowicie to, że uzyskaliśmy w niej poprawną wartość tzw. czynnika żyromagnetycznego $g = 2$

$$\mathbf{S} = \frac{m_e}{2e}g\mathbf{m}, \tag{7}$$

gdzie **S** jest wektorem spinu elektronu. Taką właśnie wartość otrzymał Dirac na gruncie swej relatywistycznej teorii elektronu. Zatem nasze rozważania pozwalają zrozumieć zupełnie elementarnie, że taka właśnie wartość czynnika g jest wynikiem własności pól elektronu, a nie trudnej do zrozumienia teorii Diraca (*komentarz*).

Warto w tym miejscu uświadomić sobie, że rozpatrując klasyczny elektron jako „kulę bilardową" o promieniu R ze wzoru (5), mającą kręt własny równy $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$, otrzymamy na jej powierzchni maksymalną prędkość około 300 razy większą od prędkości światła. Zatem istotnie klasyczne wyobrażenia spinu elektronu jako mechanicznego krętu wokół jego osi jest mocno niepewne.

Otrzymany przez nas wynik niesie w sobie jeszcze jedną niespodziankę. Rozpatrywany w szkole model Bohra atomu wodoru to nic innego jak pewien układ pól EM. Po orbicie wokół ładunku dodatniego (protonu) krąży ujemnie naładowany elektron. Postulaty Bohra, pozwalające wyjaśnić serie widmowe atomu wodoru, pojawiają się *a priori* i dopiero głębsze studia pozwalają je wyprowadzić. O ile drugi postulat o kwantowaniu energii emitowanego z atomu fotonu można wydedukować z hipotezy Plancka postawionej do opisu ciała doskonale czarnego, to pierwszy postulat o momencie pędu elektronu na stacjonarnej orbicie (patrz poniżej) nie znajduje łatwego uzasadnienia bez wejścia w mechanikę kwantową. Rozpatrzmy jednak pola w takim modelu atomu wodoru. Proton wytwarza radialne pole elektryczne. Niech rozkład jego ładunku dodatniego będzie taki jak w naszym klasycznym modelu elektronu. Krążący elektron zaś to nic innego jak zamknięty obwód z prądem, który wytwarza moment magnetyczny prostopadły do płaszczyzny ruchu

(8) $$\mathbf{m}_{orb} = -\frac{e}{2m_e}\cdot\mathbf{L}_{orb},$$

gdzie $\mathbf{L}_{orb}$ jest momentem orbitalnym krążącego elektronu. Wraz z istnieniem równocześnie dwóch składowych pola EM musi istnieć jego kręt. Ponieważ przedstawiony model atomu wodoru ma rozkład pól identyczny jak analizowany powyżej model elektronu, zatem podstawiając (8) do (6) otrzymujemy

(9) $$\mathbf{L}_{EM} = \frac{\mathbf{L}_{orb}}{2}.$$

Z kolei wiemy, że najmniejszą porcją dla $\mathbf{L}_{EM}$ może być $\hbar/2$ lub jej wielokrotność, zatem ostatecznie otrzymujemy, że

(10) $$L_{orb} = n\hbar,$$

co jest niczym innym jak pierwszym postulatem Bohra.

Być może, wielu wyda się nieprawdopodobne, aby coś tak subtelnego, tajemniczego i – by pojąć – wymagającego ogromnej wiedzy z mechaniki kwantowej – jak spin elektronu, było w sensie klasycznym po prostu krętem pola EM wytworzonego wokół tej cząstki. No cóż, czasami tak to bywa z rzeczami oczywistymi.

Literatura

R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, PWN, Warszawa 1974, tom II.

Komentarz

Artykuł Jerzego Dryzka wydał nam się zdecydowanie ciekawy i postanowiliśmy go opublikować. Uznaliśmy jednak, że artykuł należy opatrzyć komentarzem, gdyż pewne stwierdzenia autora, jak sądzimy, idą za daleko.

I tak nasza pierwsza uwaga dotyczy obserwacji, że dzięki zachowaniu momentu pędu naładowana sfera z umieszczonym wewnątrz solenoidem, będąca klasycznym modelem elektronu, zacznie się obracać, jeśli odprowadzić ze sfery ładunek bądź przerwać dopływ prądu do cewki. Przedstawiona sytuacja jest tylko jedną z możliwych. Rzecz w tym, że odprowadzaniu ładunku bądź wyłączaniu prądu towarzyszyć będzie powstanie zmiennego w czasie pola elektromagnetycznego i emisja fali elektromagnetycznej, która może unieść moment pędu naszego klasycznego elektronu. Wówczas sfera nie bedzie się obracać.

musi odczuwać ten wiatr. Prędkość światła mierzona względem Ziemi pod wiatr eterowy powinna być mniejsza niż z wiatrem. Wpływ będzie mały, bo 30 km/s to mało w porównaniu z trzystoma tysiącami kilometrów na sekundę, ale dokładne pomiary powinny wpływ ten wykryć. Byłoby to proste potwierdzenie tego, czego się spodziewano, więc właściwie niezbyt ciekawy eksperyment, którego wynik logicznie można przewidzieć. Podjął się przeprowadzenia takiego doświadczenia Albert Michelson, fizyk amerykański polskiego pochodzenia, urodzony w 1852 r. w Strzelnie w Wielkopolsce. Mierzył on różnicę prędkości światła w kierunkach wzajemnie prostopadłych sądząc, że w ten sposób wykaże istnienie wiatru eterowego.

Wynik doświadczenia był negatywny, żadnego wiatru eterowego nie udało się wykryć mimo ogromnej dokładności pomiarów. Było to tak nieoczekiwane i, dodajmy, sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, że wielu fizyków nie dało temu wiary. Konieczne stało się w tej sytuacji powtórzenie eksperymentu. Dokonał tego Michelson wraz z E. Morleyem. Zwiększono dziesięciokrotnie dokładność i znowu wynik był negatywny. Wiatru eterowego nie ma, a może nie ma eteru? A może trzeba zaproponować coś całkiem innego, zwariowanego i sprzecznego ze zdrowym rozsądkiem? Może prędkość światła nie zależy od prędkości źródła i jest zawsze w próżni stała. Pomyślmy nad tym, to przecież przeczy naszym codziennym obserwacjom. Kamień rzucony przez okno pędzącego pociągu (tego, oczywiście, nie należy robić) w kierunku ruchu na pewno porusza się szybciej względem torów niż kamień rzucony w tym samym kierunku przez dróżnika (ten chyba nie rzuca kamieniami). Przecież kamień wyrzucony z pociągu ma prędkość pociągu i prędkość nadaną przez rzucającego. My zaś chcemy założyć, że światło wysłane przez latarnie elektrowozu ma tę samą prędkość, co światło emitowane przez lampę na przejeździe kolejowym. Czy to nie wydaje się absurdalne? A jednak taki właśnie postulat wysunął Albert Einstein w 1905 r. w swojej pracy *O elektrodynamice ciał w ruchu*. Założył on po prostu, że prędkość rozchodzenia się jakichkolwiek sygnałów elektromagnetycznych w próżni jest stała i nie zależy od ruchu źródła ani od ruchu obserwatora i, co więcej, jest to maksymalna prędkość, z jaką można przekazywać sygnały w przyrodzie. Można, oczywiście, postulować każdą niedorzeczność. Postulat taki ma tylko wtedy wartość, jeżeli można sprawdzić doświadczalnie wnioski, jakie z takiego założenia wynikają. Założenie o stałości prędkości światła legło u podstaw tak zwanej szczególnej teorii względności, która jest dziś teorią bardzo dobrze zgadzającą się z doświadczeniem, ale już nie tak dobrze z naszym poczuciem tego, co jest możliwe, a co nie. W wielu swoich wynikach jest ona, szczególna teoria względności, sprzeczna ze zdrowym rozsądkiem i trzeba ją jakoś włączyć do zbioru naszej wiedzy, czyli zmienić kryteria zdrowego rozsądku w taki sposób, aby coś, co jest prawdziwe, nie wydawało się niemożliwe.

Powiedziałem, że szczególna teoria względności jest prawdziwa. Co to znaczy? A tylko tyle, że wszystkie przewidywania tej teorii, jakie umiemy wyprowadzić, zgadzają się z doświadczeniem.

Doświadczeń potwierdzających szczególną teorię względności jest dziś bardzo wiele. Warto wspomnieć chociaż o kilku takich doświadczeniach. Jedno nazwałbym doświadczeniem z szybko poruszającą się latarką. Zmierzmy prędkość światła wysyłanego przez nieruchomą względem obserwatora latarkę i następnie powtórzmy ten sam pomiar wprawiając latarkę w ruch z prędkością bliską prędkości światła. Czy to możliwe? Zaraz się o tym przekonamy. Muszą się Państwo zgodzić, aby nazwą latarki objąć każde źródło światła. W szczególności niech naszą latarką będą mezony π°. Cóż to takiego, może ktoś zapytać. Otóż w katalogu różnych cząstek, jakie zna przyroda, figurują również cząstki, które są prawie trzysta razy cięższe od elektronów, obojętne elektrycznie i bardzo krótkożyciowe. Po swoim króciutkim życiu rozpadają się przeważnie na dwa fotony, czyli na dwie porcje promieniowania elektromagnetycznego, można by powiedzieć, na dwie porcje światła, tylko w zakresie niewidzialnym dla ludzkiego oka. Mezon π° możemy więc traktować jak latarkę wysyłającą promieniowanie elektromagnetyczne. Umiemy nadawać tym mezonom bardzo duże prędkości. W jednym z doświadczeń wykonanym w międzynarodowym laboratorium CERN pod Genewą przez zespół pod kierunkiem Alvagera utworzono wiązkę bardzo wielu mezonów π° o prędkości 299 717 km/s. Prędkość światła wynosi zaś 299 792 km/s. Uzyskano więc prędkość niezwykle zbliżoną do prędkości światła. Możemy więc mówić o latarce poruszającej się prawie z prędkością światła. Pędzące mezony rozpadają się emitując falę elektromagnetyczną. Pytamy, z jaką prędkością biegnie ta fala? Dokonano pomiaru tej prędkości i okazało się, że zmierzona prędkość fali elektromagnetycznej, powstałej w wyniku rozpadu pędzących mezonów, jest dokładnie taka sama jak światła wysyłanego przez źródło w spoczynku. Einstein miał rację. Jego postulat stałości prędkości światła został potwierdzony

Autor uzyskuje zaskakujący wynik, że minimalny moment pędu statycznego pola elektromagnetycznego wynosi $\hbar/2$, nie zaś $\hbar$ (jak można było oczekiwać) przy wyborze szczególnej wartości elektromagnetycznej masy elektronu, a mianowicie

$$m_e c^2 = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}. \tag{1}$$

Jeśli przyjąć, że masie elektronu odpowiada elektrostatyczna energia zgromadzona w kuli o promieniu R, otrzymujemy współczynnik 3/5 zamiast 2/3 w równaniu (1), które natomiast można otrzymać uwzględniając dodatkowo energię niesioną przez pole magnetyczne. Obie te interpretacje masy elektronu mają jednak tę wadę, że nie uwzględniają pewnych sił (których istnienie klasyczny model elektronu powinien zakładać), a zatem i energii z nimi związanej, sprawiających, że nasza naładowana kulka nie rozlatuje się na kawałki na skutek elektrostatycznego odpychania jednoimiennych ładunków.

Nie można uznać opisanego modelu elektronu za całkowicie klasyczny, gdyż autor „przemyca" do swoich rozważań *kwantową* wielkość momentu magnetycznego elektronu $-e\hbar/(2m_e)$.

Wymaga również komentarza użycie w artykule wielkości „krętu własnego" czy raczej spinu elektronu $\sqrt{3}\hbar/2$, nie zaś powszechnie przyjętej wartości $\hbar/2$. Rzecz w tym, że autor interpretuje w sposób *klasyczny* pewne wyrażenia otrzymane na gruncie mechaniki kwantowej. Przyjmuje on mianowicie, że moment pędu układu wyraża się wzorem $\sqrt{l(l+\hbar)}$, gdzie l można uważać za maksymalną wielkość rzutu momentu pędu na dowolnie wybraną oś. Wówczas przy $l = \hbar/2$ otrzymujemy wartość momentu pędu $\sqrt{3}\hbar/2$. Jeśli natomiast przyjąć, że moment pędu równy jest maksymalnej wielkości rzutu, co zachodzi zarówno w mechanice klasycznej, jak i kwantowej, to otrzymujemy standardową wartość momentu pędu równą $\hbar/2$.

I jeszcze jedna uwaga. Przedstawiony model spinu może być jedynie zastosowany do cząstek naładowanych, takich jak elektron. Spin jednak mają również niektóre cząstki neutralne i przedstawiony model zupełnie wówczas zawodzi.

Czytelnik może zapytać, czy wobec tylu krytycznych komentarzy omawiany artykuł w ogóle powinien się w *Delcie* ukazać. Naszym zdaniem tak. Problem, czym jest spin, nurtuje wielu fizyków, autor artykułu zaś przedstawiając ciekawe rozważania próbuje ten problem rozwiązać. A to, że się w wielu punktach nie zgadzamy? Cóż, fizyka, nie ta ze szkolnych podręczników, ale ta, jaką obecnie się „robi", taka właśnie często bywa.

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Konkurs

Jedyny znany dowód poniższego twierdzenia jest bardzo, bardzo nieelementarny (szkic tego dowodu był opublikowany w *Delcie* 6/1988). Ogłaszamy więc otwarty konkurs na elementarny dowód. Jeśli nie będzie on zbyt długi, to z chęcią go opublikujemy. A poza tym będzie to z pewnością bardzo dobry temat na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

A oto zapowiedziane twierdzenie:

Kwadratu nie można podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach.

Redakcja

O pewnej nierówności

Udowodnimy na początku następujące

Twierdzenie. Jeżeli $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ oraz $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jest permutacją ciągu $1, 2, \ldots, n$, to

$$a_1b_n + \ldots + a_nb_1 \le a_1b_{j_1} + \ldots + a_nb_{j_n} \le a_1b_1 + \ldots a_nb_n .$$

Dowód. Naszkicujemy tylko uzasadnienie prawej nierówności (dowód lewej jest analogiczny). Dowód indukcyjny sprowadza się do wykazania następującej nierówności:

$$a_1b_k + a_lb_1 \le a_1b_1 + a_lb_k .$$

Ta zaś nierówność równoważna jest następującej oczywistej nierówności:

$$a_1(b_1 - b_k) + a_l(b_k - b_1) = (a_l - a_1)(b_k - b_1) \ge 0 .$$

Pokażemy teraz kilka zastosowań udowodnionego przez nas twierdzenia.

Przykład 1. Jeżeli $x_1, \ldots, x_n > 0$, to

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \ge n .$$

Dowód. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będzie taką permutacją ciągu $x_1, \ldots, x_n$, że $a_1 \le \ldots \le a_n$. Wówczas jeżeli przyjmiemy $b_i = 1/a_{n+1-i}$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $b_1 \le \ldots \le b_n$. Stąd dla pewnej permutacji (j_i) mamy

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = a_1b_{j_1} + \ldots + a_nb_{j_n} \ge a_1b_n + \ldots + a_nb_1 = n .$$

Przykład 2. Jeżeli $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ oraz $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, to

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Dowód.

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1} .$$

Dodając stronami i przypatrując się uważnie prawej stronie otrzymamy żądaną nierówność.

Przykład 3. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe, nieujemne i niemalejące na przedziale $[0,1]$, to

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) .$$

Dowód. Ustalmy n. Niech $a_i = f(\frac{i}{n})$, $b_i = g(\frac{i}{n})$. Korzystając z przykładu 2 mamy nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}\right) .$$

Stąd przechodząc do granicy przy n dążącym do nieskończoności otrzymamy tezę.

Podobnie można udowodnić, że jeżeli funkcja f jest niemalejąca, funkcja zaś g jest nierosnąca, to

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) .$$

Bogdan WOJCIESZYK

doświadczalnie. Czy przez to postulat ten staje się zrozumiały, czy umiemy sobie wyobrazić, jak to jest możliwe? Wątpię. Do tego trzeba się przyzwyczaić. Można się zapytać, a jak to jest z rzucaniem kamienia z pędzącego pociągu. Kamień na pewno porusza się szybciej niż kamień rzucony przez dróżnika. Czy fizyka kamienia jest inna niż fizyka światła? Byłoby to również niezrozumiałe. Otóż, szczególna teoria względności umie te sprzeczności pogodzić. Fizyka kamienia i fizyka światła jest jedna. Wzory szczególnej teorii względności są słuszne i dla dużych, i dla małych prędkości. Dla małych prędkości przewidywania szczególnej teorii względności prawie nie różnią się od tego, czego oczekiwalibyśmy na podstawie wzorów fizyki klasycznej, które są w tym zakresie prędkości wzorami przybliżonymi, ale dającymi bardzo dobre wyniki. Kamień porusza się wolno w stosunku do prędkości światła, więc można z powodzeniem stosować wzory uproszczone. Dla obiektów poruszających się z prędkościami porównywalnymi do prędkości światła robić tego nie wolno.

Pokażmy to na przykładzie. Niech pociąg jedzie z prędkością stu kilometrów na godzinę. Niech prędkość rzuconego kamienia względem pociągu wynosi 10 kilometrów na godzinę. Z doświadczenia wiemy, że prędkość kamienia względem ziemi będzie równa sumie tych obu prędkości, czyli 110 kilometrów na godzinę. Szczególna teoria względności mówi co innego. Prędkość ta będzie mniejsza od sumy prędkości i wyniesie nie 110 km/h, ale mniej, z tym że różnica wystąpi na piętnastym miejscu po przecinku. Dla prędkości spotykanych w życiu codziennym jest to różnica nie do zauważenia. Co innego, gdyby i pociąg, i kamień poruszały się z prędkością np. połowy prędkości światła. Wtedy prędkość wypadkowa nie równałaby się sumie, czyli prędkości światła, tylko 0,8 prędkości światła. A to już byłoby zauważalne.

Jak to więc jest z tym tytułowym przyspieszaniem? Otóż, póki poruszamy się z prędkościami małymi w porównaniu z prędkością światła, to możemy normalnie przyspieszać. Rakieta kosmiczna porusza się wolno. Przy włączonym silniku nabiera coraz większej prędkości. I to jest dla nas zrozumiałe. A gdyby to była superrakieta pędząca z prędkością bliską prędkości światła, to co wtedy? Również można by włączyć jakiś silnik, np. fotonowy. Silnik mógłby pracować, a rakieta zwiększałaby energię, ale prawie nie zwiększałaby się jej prędkość. Jak to możliwe? Otóż, wzrastałaby masa rakiety. O tym, że każdy z nas ma masę kilku ton i przeżył już tysiąc lat, opowiem w następnym artykule.