O pewnej nierówności

Udowodnimy na początku następujące

Twierdzenie. Jeżeli $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ oraz $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jest permutacją ciągu $1, 2, \ldots, n$, to

$$a_1b_n + \ldots + a_nb_1 \le a_1b_{j_1} + \ldots + a_nb_{j_n} \le a_1b_1 + \ldots a_nb_n .$$

Dowód. Naszkicujemy tylko uzasadnienie prawej nierówności (dowód lewej jest analogiczny). Dowód indukcyjny sprowadza się do wykazania następującej nierówności:

$$a_1b_k + a_lb_1 \le a_1b_1 + a_lb_k .$$

Ta zaś nierówność równoważna jest następującej oczywistej nierówności:

$$a_1(b_1 - b_k) + a_l(b_k - b_1) = (a_l - a_1)(b_k - b_1) \ge 0 .$$

Pokażemy teraz kilka zastosowań udowodnionego przez nas twierdzenia.

Przykład 1. Jeżeli $x_1, \ldots, x_n > 0$, to

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \ge n .$$

Dowód. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będzie taką permutacją ciągu $x_1, \ldots, x_n$, że $a_1 \le \ldots \le a_n$. Wówczas jeżeli przyjmiemy $b_i = 1/a_{n+1-i}$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $b_1 \le \ldots \le b_n$. Stąd dla pewnej permutacji (j_i) mamy

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = a_1b_{j_1} + \ldots + a_nb_{j_n} \ge a_1b_n + \ldots + a_nb_1 = n .$$

Przykład 2. Jeżeli $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ oraz $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, to

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Dowód.

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1} .$$

Dodając stronami i przypatrując się uważnie prawej stronie otrzymamy żądaną nierówność.

Przykład 3. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe, nieujemne i niemalejące na przedziale $[0,1]$, to

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Dowód. Ustalmy n. Niech $a_i = f(\frac{i}{n})$, $b_i = g(\frac{i}{n})$. Korzystając z przykładu 2 mamy nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right).$$

Stąd przechodząc do granicy przy n dążącym do nieskończoności otrzymamy tezę.

Podobnie można udowodnić, że jeżeli funkcja f jest niemalejąca, funkcja zaś g jest nierosnąca, to

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Bogdan WOJCIESZYK

doświadczalnie. Czy przez to postulat ten staje się zrozumiały, czy umiemy sobie wyobrazić, jak to jest możliwe? Wątpię. Do tego trzeba się przyzwyczaić. Można się zapytać, a jak to jest z rzucaniem kamienia z pędzącego pociągu. Kamień na pewno porusza się szybciej niż kamień rzucony przez dróżnika. Czy fizyka kamienia jest inna niż fizyka światła? Byłoby to również niezrozumiałe. Otóż, szczególna teoria względności umie te sprzeczności pogodzić. Fizyka kamienia i fizyka światła jest jedna. Wzory szczególnej teorii względności są słuszne i dla dużych, i dla małych prędkości. Dla małych prędkości przewidywania szczególnej teorii względności prawie nie różnią się od tego, czego oczekiwalibyśmy na podstawie wzorów fizyki klasycznej, które są w tym zakresie prędkości wzorami przybliżonymi, ale dającymi bardzo dobre wyniki. Kamień porusza się wolno w stosunku do prędkości światła, więc można z powodzeniem stosować wzory uproszczone. Dla obiektów poruszających się z prędkościami porównywalnymi do prędkości światła robić tego nie wolno.

Pokażmy to na przykładzie. Niech pociąg jedzie z prędkością stu kilometrów na godzinę. Niech prędkość rzuconego kamienia względem pociągu wynosi 10 kilometrów na godzinę. Z doświadczenia wiemy, że prędkość kamienia względem ziemi będzie równa sumie tych obu prędkości, czyli 110 kilometrów na godzinę. Szczególna teoria względności mówi co innego. Prędkość ta będzie mniejsza od sumy prędkości i wyniesie nie 110 km/h, ale mniej, z tym że różnica wystąpi na piętnastym miejscu po przecinku. Dla prędkości spotykanych w życiu codziennym jest to różnica nie do zauważenia. Co innego, gdyby i pociąg, i kamień poruszały się z prędkością np. połowy prędkości światła. Wtedy prędkość wypadkowa nie równałaby się sumie, czyli prędkości światła, tylko 0,8 prędkości światła. A to już byłoby zauważalne.

Jak to więc jest z tym tytułowym przyspieszaniem? Otóż, póki poruszamy się z prędkościami małymi w porównaniu z prędkością światła, to możemy normalnie przyspieszać. Rakieta kosmiczna porusza się wolno. Przy włączonym silniku nabiera coraz większej prędkości. I to jest dla nas zrozumiałe. A gdyby to była superrakieta pędząca z prędkością bliską prędkości światła, to co wtedy? Również można by włączyć jakiś silnik, np. fotonowy. Silnik mógłby pracować, a rakieta zwiększałaby energię, ale prawie nie zwiększałaby się jej prędkość. Jak to możliwe? Otóż, wzrastałaby masa rakiety. O tym, że każdy z nas ma masę kilku ton i przeżył już tysiąc lat, opowiem w następnym artykule.