Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 219 (WT=3,52) i 220 (WT=1,67) z numeru 4/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	42,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Zadania z matematyki nr 233, 234

Redaguje Marcin E. KUCZMA

233. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}\geq 0.$$

234. Różnicę symetryczną pary zbiorów określamy wzorem $A \dot{-} B := (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. Dla większej liczby zbiorów określamy indukcyjnie:

$$A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k := A_1 \dot{-} (A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k).$$

Niech dane będą liczby naturalne $n, k \geq 2$. Obliczyć wartość sumy

$$\sum |A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k|,$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich uporządkowanych układach $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,n\}$, zaś symbol $|X|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru X.

Zadanie **234** zaproponował pan Tomasz Wietecha z Tarnowa jako kontynuację zadania **214** (*Delta* 1/1991).

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1991
Przypominamy treść zadań:

225. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathrm{N}_0 \to \mathrm{N}_0$ ($\mathrm{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$), spełniające równanie $f(f(n)) + f(n) = 2n+6$ dla $n \in \mathrm{N}_0$.

226. Dla danego niemalejącego ciągu liczb dodatnich $a_0, a_1, a_2, \ldots$ określamy

$$b_n = n - \left(\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Udowodnić, że ciąg (b_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny.

225. Załóżmy, że funkcja f spełnia podany warunek. Wybierzmy dowolną liczbę $x_0 \in \mathrm{N}_0$ i przyjmijmy $x_{k+1} = f(x_k)$ dla $k = 0,1,2,\ldots$ Tak określony ciąg (x_k) spełnia zależność rekurencyjną

$$x_{k+2} = 2x_k - x_{k+1} + 6.$$

Tak więc

$$x_3 = 3x_1 - 2x_0,\ x_4 = 6x_0 - 5x_1 + 18,\ x_5 = 11x_1 - 10x_0 - 12,$$

$$x_6 = 22x_0 - 21x_1 + 54,\ x_7 = 43x_1 - 42x_0 - 72,\ \ldots$$

Biorąc w szczególności jako x_0 liczby 0 i 1 otrzymujemy tą metodą ciągi (a_k) i (b_k) o wyrazach

$$a_0 = 0,\ a_1 = f(0),\ \ldots,\ a_5 = 11a_1 - 12,\ a_6 = 54 - 21a_1,\ \ldots,$$

$$b_0 = 1,\ b_1 = f(1),\ \ldots,\ b_6 = 76 - 21b_1,\ b_7 = 43b_1 - 114,\ \ldots.$$

Liczby (całkowite) a_5, a_6, b_6, b_7 mają być nieujemne; stąd wnosimy, że $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. Możemy teraz obliczyć początkowe wyrazy:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ \ldots,$$

$$b_0 = 1,\ b_1 = 3,\ b_2 = 5,\ b_3 = 7,\ \ldots.$$

Zgadujemy wzory ogólne $a_k = 2k$, $b_k = 2k+1$; dowody indukcyjne są natychmiastowe. Zatem $f(a) = a+2$ dla każdej liczby parzystej $a \geq 0$ oraz $f(b) = b+2$ dla każdej liczby nieparzystej $b \geq 1$. Krótko:

$$f(n) = n+2 \quad \text{dla} \quad n \in \mathrm{N}_0.$$

Jest to jedyna funkcja spełniająca warunki zadania.

226. Oznaczmy $x_k = a_{k-1}/a_k$ dla $k = 1,2,3,\ldots$ i zauważmy, że

$$a_n = a_0\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-x_k).$$

Liczby x_k spełniają nierówności $0 < x_k \leq 1$, więc ciąg (b_n) jest niemalejący.
Jeżeli ciąg (x_k) nie dąży do 1, to zarówno ciąg (a_n), jak i (b_n), jest rozbieżny.
W dalszym ciągu zakładamy, że $\lim x_k = 1$. Ciąg o wyrazach $t_k = -\ln x_k$ spełnia warunki:

$$t_k \geq 0 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots;\ \lim t_k = 0.$$

Istnieje taki numer k_0, że $t_k \leq 1$ dla $k > k_0$. Mamy więc dwustronne oszacowanie

$$x_k = \begin{cases} e^{-t_k} \geq 1 - t_k & \text{dla } k \geq 1, \\ \dfrac{1}{e^{t_k}} \leq \dfrac{1}{1+t_k} = 1 - \dfrac{t_k}{1+t_k} \leq 1 - \dfrac{t_k}{2} & \text{dla } k > k_0. \end{cases}$$

Zatem dla $n > k_0$ zachodzą nierówności:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k = -\ln\prod_{k=1}^{n} x_k = \ln a_n - \ln a_0,$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq \sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{t_k}{2} = -\frac{1}{2}\ln\prod_{k=k_0+1}^{n} x_k = \frac{1}{2}(\ln a_n - \ln a_{k_0}).$$

Wobec monotoniczności ciągów (a_n) i (b_n) wynika stąd, że ciągi te są albo oba zbieżne, albo oba rozbieżne.

Zadania z fizyki nr 131, 132

Redaguje Jerzy B. BROJAN

131. Młynek Segnera (stosowany np. do podlewania ogrodów) działa na zasadzie odrzutu: do rurki z zagiętymi końcami doprowadza się w środku wodę, która wypływa przez końce wprawiając rurkę w ruch obrotowy. Jeśli potraktujemy młynek jako silnik (obracający jakieś urządzenie), to ile wynosi jego moc? Pompa zasila młynek wodą pod ciśnieniem p, a dopływ wody na jednostkę czasu jest równy $\frac{m}{t}$. Długość każdej z części rurki wynosi r, a prędkość kątowa – ω. Pominąć lepkość wody.

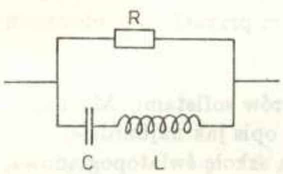
132. Solenoid bez rdzenia ma kształt linii śrubowej o n zwojach, długości l i promieniu przekroju r, przy czym $\frac{l}{n} \ll r \ll l$. Obliczyć siłę ściskającą solenoid (działającą na końce wzdłuż osi), gdy płynie przez nią prąd o natężeniu I.

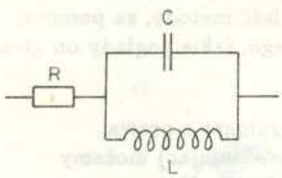
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1991

Przypominamy treść zadań:

128. Pudełko, z którego wychodzą dwa przewody, zawiera kondensator, opornik i cewkę o pomijalnie małym oporze, połączone w nieznany sposób. Po przyłożeniu napięcia stałego stwierdzono, że opór pudełka wynosi 100 Ω, i taki sam opór wykazuje ono w obwodzie prądu przemiennego bardzo wielkiej częstotliwości. Po przyłożeniu napięcia sinusoidalnego moduł impedancji (zawada) okazał się równy 50 Ω przy częstotliwości 100 Hz i 80 Ω przy częstotliwości 200 Hz. Narysować schemat obwodu i wyznaczyć wartości L i C.

124. Ciecz lepka wypełnia przestrzeń pomiędzy dwoma długimi cylindrami obracającymi się wokół wspólnej osi, przy czym wewnętrzny cylinder ma promień r_1 i prędkość kątową ω_1, a zewnętrzny – promień r_2 i prędkość kątową ω_2. Jakim wzorem wyraża się zależność prędkości cieczy od odległości r od osi? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny (niezależny od czasu) i laminarny.





123. Istnieją tylko dwa obwody RLC, których impedancja Z jest równa R zarówno dla $\omega = 0$, jak i dla $\omega = \infty$ (rysunek). Ponieważ dla częstotliwości pośrednich podane w treści zadania wartości Z są mniejsze od R, więc – znajdując w standardowy sposób wzory na impedancję – przekonujemy się, że drugi z narysowanych obwodów jest wykluczony i pozostaje nam tylko pierwszy, którego impedancja jest dana wyrażeniem

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{C^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2}.$$

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R^2}\right)^{-1/2} = \left|\frac{1}{C\omega} - L\omega\right|.$$

Oznaczmy lewą stronę równania symbolem Y; wyliczając jej wartość dla $R = 100\ \Omega$ i $Z_1 = 50\ \Omega$ otrzymujemy $Y_1 = 57,74\ \Omega$, a dla $Z_2 = 80\ \Omega$ mamy $Y_2 = 133,33\ \Omega$. Układ równań

$$Y_1 = \left|\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1\right|, \quad Y_2 = \left|\frac{1}{C\omega_2} - L\omega_2\right|$$

przy podanych wartościach liczbowych ma dwa rozwiązania:

$$(1) \qquad L = \frac{Y_1\omega_1 + Y_2\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,172\ \mathrm{H}, \quad C = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{Y_1}{\omega_1} + \frac{Y_2}{\omega_2}\right)^{-1} = 9,60\ \mu\mathrm{F},$$

$$(2) \qquad L = \frac{Y_2\omega_2 - Y_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,111\ \mathrm{H}, \quad C = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{Y_2}{\omega_2} - \frac{Y_1}{\omega_1}\right)^{-1} = 134\ \mu\mathrm{F},$$

124. Zgodnie z definicją współczynnika lepkości cieczy η przy poślizgu warstw cieczy po sobie występuje siła tarcia (lepkości) dana wzorem

$$\frac{F}{S} = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z},$$

gdzie S – powierzchnia warstw, $\mathrm{d}v$ – zmiana prędkości przy przesunięciu o $\mathrm{d}z$ w kierunku prostopadłym do powierzchni. W naszym przypadku ślizgające się po sobie warstwy mają kształt współśrodkowych cylindrów, a siła tarcia wynika z różnicy ich prędkości kątowych. Do powyższego wzoru należy więc podstawić $\mathrm{d}v = r\mathrm{d}\omega$, skąd

$$F = S\eta r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}.$$

Równowaga (przepływ stacjonarny) wystąpi wtedy, gdy moment siły działający na każdą warstwę cylindryczną od wewnątrz będzie równy momentowi siły działającemu od zewnątrz, zatem

$$M = Fr = S\eta r^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = const.$$

Ponieważ pole powierzchni bocznej S walca jest proporcjonalna do r, więc otrzymujemy

$$r^3\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = const, \quad \text{a stąd} \quad \omega = a + \frac{b}{r^2}.$$

Prędkość liniowa $v = \omega r$ zależy więc od r według wzoru $v = ar + \frac{b}{r}$. Stałe a i b można wyznaczyć z warunków $\omega_1 = a + \frac{b}{r_1^2}$, $\omega_2 = a + \frac{b}{r_2^2}$. Równoważna, lecz ogólniejsza i bardziej zaawansowana metoda rozwiązania opiera się na równaniu Naviera-Stokesa, z którego wynika warunek $\Delta\vec{v} = 0$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 117 (WT=2,93) i 118 (WT=1,60) z numeru 4/1991

Paweł Perkowski	– Szczecin	32,65
Adam Sikorski	– Lublin	30,34
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	14,11
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	12,08

Wyrazy uznania dla p. Sikorskiego, który w imponującym stylu zmierza po tytuł **Weterana Klubu 44F**.