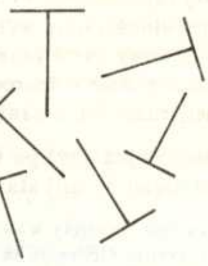
epsilon

1/92 (11)

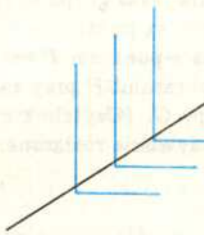
Litery T i nie tylko



Wyobraźmy sobie, że chcemy umieścić na płaszczyźnie pewną ilość liter T (bez „grubości", czyli złożonych tylko z odcinków). Litery te mogą być różnych rozmiarów, rozmaicie położone, chcemy jedynie, by były parami rozłączne (tzn. dwie różne nie mogą mieć punktów wspólnych).

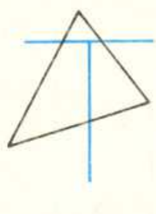
Oczywiście, można ich „położyć" dowolną skończoną liczbę albo umieścić nieskończenie wiele. Nieskończoności jednak bywają różne...

Jeśli elementy zbioru nieskończonego można ponumerować liczbami naturalnymi (ustawić w ciąg nieskończony), to zbiór taki nazywany jest *przeliczalnym*. Przeliczalny jest np. zbiór liczb całkowitych $(0,1,-1,2,-2,\ldots)$. Ma tę własność również zbiór liczb wymiernych, oznaczany przez $\mathbf{Q}$. Zbiory uporządkowanych par, trójek, szóstek elementów ze zbiorów przeliczalnych (np. $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Q}^6$) też są zbiorami przeliczalnymi. Każdy nieskończony podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny. Nie wszystkie jednak zbiory nieskończone są przeliczalne; na przykład, zbioru liczb rzeczywistych czy punktów płaszczyzny w ciąg ustawić się nie da. Informacja, czy dany zbiór nieskończony jest przeliczalny, czy nie, często jest dla matematyków bardzo istotna.



Zbiór parami rozłącznych liter L na płaszczyźnie nie musi być przeliczalny. Istotnie: można narysować na płaszczyźnie prostą i w każdym jej punkcie „zaczepić" literę L jej wierzchołkiem, tak, by rysowane litery mogły być otrzymane jedna z drugiej za pomocą przesunięcia wzdłuż prostej. Może więc być liter L tyle, ile punktów na prostej, a to jest zbiór nieprzeliczalny.

Czy w przypadku liter T wynik jest taki sam, czy też zbiór taki, jeśli jest nieskończony, musi być przeliczalny? Spróbujmy przeanalizować ten problem.



Każda litera T składa się z trzech odcinków; nazwijmy je „ogonkami", zaś punkt, w którym się one łączą, „środkiem" litery T. Będziemy mówić, że trójkąt spełnia warunek (*) (ze względu na daną literę T), *jeśli środek badanej litery T znajduje się wewnątrz trójkąta, zaś ogonki litery „wychodzą" na zewnątrz, każda przez inny bok.*

Idea rozwiązania naszego problemu polega na zauważeniu dwóch własności:

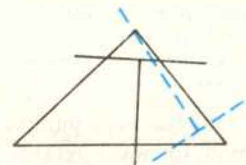
(1) dla dowolnie położonej litery T istnieje trójkąt, spełniający ze względu na tę literę warunek (*), przy czym wierzchołki trójkąta są elementami $\mathbf{Q}^2$ (do $\mathbf{Q}^2$ należą punkty płaszczyzny, których obie współrzędne kartezjańskie są liczbami wymiernymi),

(2) jeśli pewien trójkąt spełnia warunek (*) ze względu na dwie litery T, to litery te muszą mieć punkt wspólny.

Z tych dwóch warunków łatwo wynika, że badany zbiór liter T może być co najwyżej przeliczalny. Istotnie, jeśli litery są parami rozłączne, to nie może ich być więcej niż trójkątów o wierzchołkach z $\mathbf{Q}^2$, tych zaś nie może być więcej, niż uporządkowanych „szóstek" liczb wymiernych ($\mathbf{Q}^6$). Ten ostatni zbiór jest zaś przeliczalny.

Jak natomiast uzasadnić własności (1) i (2)?

Wiemy, że zbiór $\mathbf{Q}$ jest gęsty w $\mathbf{R}$ (w dowolnym przedziale można znaleźć liczbę wymierną). Podobnie $\mathbf{Q}^2$ jest gęsty na płaszczyźnie – w dowolnym kole znajdziemy punkt o obu współrzędnych wymiernych. Stąd łatwo wykazać możliwość konstrukcji trójkąta z warunku (1).



Przypuśćmy teraz, że trójkąt spełnia warunek (*) z dwiema literami T. Pierwsza z nich wycina z trójkąta trzy wielokąty (dwa czworokąty i jeden trójkąt). Litery mają być rozłączne, więc środek drugiej z nich leży wewnątrz któregoś z wielokątów.

Ogonki drugiej litery muszą jednak „wyjść" z trójkąta, a więc i z małego wielokąta. Wielokąt taki ma jedynie dwa boki zawarte w bokach wyjściowego trójkąta, tylko dwa ogonki mogą wyjść przez te boki, trzeci zatem musi przeciąć pierwszą literę T. Obie litery mają więc punkt wspólny.

Jedna kreseczka w literze powoduje zatem istotnie inny końcowy efekt. A jak jest w przypadku pozostałych liter alfabetu? Można też badać inne „znaczki". Można zażądać, by na badanym rysunku każda z liter była innych rozmiarów albo, by żadne dwie nie były podobne (w sensie geometrycznym) – w przypadku liter takich, jak *R*, nie jest to bynajmniej żądanie wygórowane... Zadań tego typu może być wiele. Czy zawsze łatwo je rozwiązać?

Krzysztof CIESIELSKI

Cytaty Bez Galerii

– Ja jestem matematykiem i mam obowiązek powiedzieć państwu o rzeczach ciekawych.

– Nie wiem, czy państwa to zadowala, ale ja przynajmniej rozumiem ten dowód.

– Ja nie lubię tych bijekcji, injekcji i surjekcji. To jest taka francuska infekcja.

– Jakby to państwu wytłumaczyć? Po prostu tak jest!

– Jedyne, co mogę zrobić, to przeprosić; nie przeciągnąć nie mogę.

EPSILON nr 11 jest inny, niż miał być pierwotnie. Planowaliśmy w styczniu 1992 umieścić rozmowę *Z Markiem Kordosem o Delcie*, przeprowadzoną z okazji uzyskania pełnoletności przez *Deltę* (kończy ona właśnie 18 lat). Kolegium Redakcyjne *Delty* uznało jednak, że nie wypada pisać w *Delcie* o *Delcie*. Przedstawiamy zatem numer kolejny, żałując, że z bardzo interesującymi opowieściami Redaktora Naczelnego (o kuluarach powstania pisma, hektarach Instytutu Badań Jądrowych i nie tylko...) nie zapoznają się Czytelnicy *Delty*.

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem *ε*.