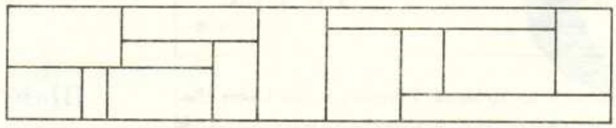
Elementarny dowód

Jest to drugie elementarne rozwiązanie tego zadania zamieszczone w *Delcie*. Pierwsze zostało zamieszczone w numerze 11/1991.

Poniższe zadanie wraz z adnotacją, że redakcja nie zna elementarnego rozwiązania zostało zamieszczone w *EPSILONIE* nr 7 (*Delta* 9/1991).

Prostokąt P dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt P ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.



A oto elementarny dowód.
Niech wierzchołki prostokąta P mają współrzędne $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ i (a,b). Załóżmy, że $b \notin N$. Mamy wykazać, że $a \in N$.

Dzieląc w razie potrzeby prostokąty, z których składa się prostokąt P, na mniejsze prostokąciki możemy założyć, że mają one boki o długościach nie większych niż 1 (co najmniej jeden z boków ma wówczas długość 1).

Udowodnimy następujący fakt:

(*) Niech $n \leq a$ będzie liczbą naturalną (lub zerem). Wówczas suma wysokości prostokącików przecinanych pionową prostą $x = n$ (tzn. takich, przez których wnętrze przechodzi ta prosta) jest liczbą całkowitą.

Jednak zanim udowodnimy ten fakt, pokażemy, jak za jego pomocą dokończyć zadanie.

Niech m oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od a (to nie to samo, co *entier*).

Ponieważ suma wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = m$ oraz tych, które przylegają do niej lewym bokiem, jest równa $b \notin N$, więc – jak wynika z (*) – istnieje prostokącik przylegający lewym bokiem do prostej $x = m$, mający wysokość mniejszą niż 1. Stąd jego poziomy bok ma długość 1, a więc $a \geq m + 1$, co wobec definicji liczby m daje $a = m + 1 \in N$.

Pozostaje więc wykazać (*). Udowodnimy to za pomocą indukcji. Dla $n = 0$ – oczywiste. Wystarczy więc udowodnić, że jeżeli suma wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t$ $(0 \leq t \leq a - 1)$ jest liczbą całkowitą, to suma wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ też jest liczbą całkowitą.

Niech $\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową liczby x. Otóż wysokość prostokąta P, czyli b, jest równa sumie wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t$ oraz wysokości prostokącików przylegających do niej lewym bokiem.

Ale ponieważ suma wysokości prostokącików przecinanych jest liczbą całkowitą oraz suma wysokości prostokącików przylegających o poziomych bokach krótszych niż 1 też jest całkowita, więc $\{b\}$ jest równe

(**) części ułamkowej sumy wysokości prostokącików przylegających lewym bokiem do prostej $x = t$, których poziomy bok ma długość 1.

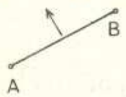
Ponieważ podobnie wysokość b prostokąta P jest równa sumie wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ oraz prostokącików przylegających do niej prawym bokiem, więc $\{b\}$ jest równe

(***) części ułamkowej sumy wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ oraz prostokącików przylegających do niej prawym bokiem, których bok poziomy ma długość 1.

Ale ponieważ prostokącik o boku poziomym długości 1 przylega lewym bokiem do prostej $x = t$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawym bokiem przylega do prostej $x = t + 1$, więc z (**) i (***) wynika, że część ułamkowa sumy wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ jest równa zero, co kończy dowód.

Bolesław GAWEŁ

Rozwiązanie zadania M 619. Jeżeli liczba zapisana w punkcie A jest mniejsza od liczby zapisanej w sąsiednim punkcie B, to rysujemy strzałkę w lewo od odcinka AB (idąc z A do B), jak na rysunku:



Jeżeli liczby zapisane w wierzchołkach jakiegoś trójkąta rosną zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to wewnątrz tego trójkąta leży jedna strzałka, jeżeli w kierunku przeciwnym – to dwie. Oznaczmy przez n liczbę trójkątów drugiego rodzaju. Wówczas całkowita liczba strzałek leżących wewnątrz sześciokąta równa jest $2n + (24 - n) = 24 + n$. Wystarczy teraz zauważyć, że musi ona być nie mniejsza niż 31 (30 strzałek pochodzi od wewnętrznych odcinków i co najmniej jedna od granicznych).

Rozwiązanie zadania M 620. Ponieważ żadne dwie z tych łamanych nie mogą mieć wspólnego odcinka, więc w każdym spośród 12 punktów na obwodzie, z których wychodzą 3 odcinki, musi znajdować się koniec łamanej. Ale 5 łamanych może mieć co najwyżej 10 końców.

Rozwiązanie zadania M 621. Niech A, B, C będą kolejnymi wierzchołkami. Wówczas każde dwa spośród odcinków AB, BC, CA i $n-3$ przekątnych wychodzących z B mają punkt wspólny. Trzeba więc co najmniej n kolorów. Jest to również liczba wystarczająca: należy pomalować k-tym kolorem wszystkie odcinki tworzące z bokiem AB kąt $\frac{k}{n} \cdot 180°$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.