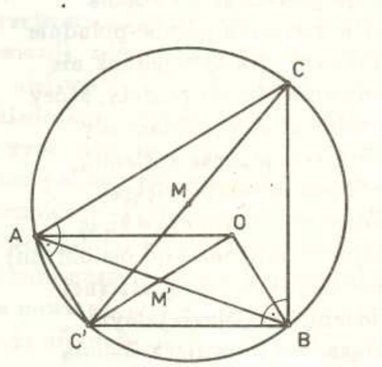
Rozwiązanie zadania M 616.
Zrzutujmy wszystkie wielokąty na oś liczbową. Obraz każdego z nich jest odcinkiem. Wszystkie te odcinki mają punkt wspólny (np. największy spośród ich lewych końców). Prosta prostopadła do osi, przechodząca przez ten punkt, ma punkty wspólne ze wszystkimi wielokątami.

W rozwiązaniu był błąd

Zadanie **M 600** (*Delta* 5/1991) polegało na znalezieniu figury złożonej z ortocentrów (punktów przecięcia wysokości) trójkątów ABC, gdzie A i B są ustalone, a C przebiega ustalony okrąg o przechodzący przez A i B. W rozwiązaniu podano, że figurą tą jest obraz symetryczny okręgu o względem prostej AB bez punktów A i B.

Pan **Krzysztof Zajkowski** z Moniek zwrócił nam uwagę, że rozwiązanie jest złe (napisał bardzo uprzejmie: *istnieje drobna usterka*) i dowiódł, że właściwym rozwiązaniem jest obraz okręgu o w przesunięciu o wektor $2\overrightarrow{MM'}$ (gdzie M to środek okręgu o, a M' to środek odcinka AB) bez obrazów punktów A i B w tym przesunięciu. Dlaczego można napisać, że jest to drobna usterka? Zapewne dlatego, że obraz okręgu o w symetrii względem prostej AB jest tą samą figurą, co obraz tego okręgu w przesunięciu o wektor $2\overrightarrow{MM'}$; można więc spojrzeć na to tak, że różnica polega jedynie na drobiazgu – które dwa punkty należy pominąć. Ale musimy jasno powiedzieć jeszcze raz – rozwiązanie było złe.



A oto dobre rozwiązanie pana Zajkowskiego.
Oznaczmy przez C' obraz punktu C w symetrii względem M, a przez O – obraz C' w symetrii względem M'. Wówczas $C'A \perp AC$ i $C'B \perp BC$ (bo CC' jest średnicą okręgu o) oraz $OB || C'A$ i $OA || C'B$ (bo symetria środkowa przeprowadza proste na proste do nich równoległe). Stąd O jest ortocentrum (bo $OB \perp AC$ i $OA \perp BC$). Ale w ten sposób zbiór ortocentrów to zbiór obrazów możliwych punktów C (a więc bez A i B) w złożeniu dwu symetrii środkowych – względem M i M'. Złożenie takich symetrii jest przesunięciem o wektor $2\overrightarrow{MM'}$.

Pozostaje pytanie, gdzie w rozwiązaniu zadania **M 600**, które zamieściliśmy, kryje się błąd. Otóż wykazaliśmy tam, że **każde** ortocentrum leży na obrazie symetrycznym o względem prostej AB (co jest prawdą), a nic nie powiedzieliśmy o figurze utworzonej przez **wszystkie** ortocentra.

Jeszcze gorzej wygląda sprawa uwagi *bez punktów* A i B. Oczywiście, punkty te mogą być ortocentrami pewnych spośród rozpatrywanych trójkątów: gdy AC jest średnicą, ortocentrum jest B, a gdy średnicą jest BC – ortocentrum jest A.

Bardzo dziękujemy panu Zajkowskiemu i przepraszamy wszystkich Czytelników.

Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania M 617.
Udowodnimy, że taki wielomian nie istnieje. Jeśli P ma współczynniki naturalne, wówczas, oczywiście, dla dostatecznie dużych k suma cyfr liczby $P(10^k)$ równa jest sumie sum cyfr współczynników wielomianu P, a więc $P(n)$ nie jest rozbieżny do nieskończoności. Wystarczy teraz udowodnić, że dla dowolnego wielomianu P o współczynnikach całkowitych istnieje taka liczba naturalna d, że wielomian $Q(x) = P(x+d)$ ma współczynniki naturalne. Niech

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Możemy założyć, że $a_n > 0$. Mamy

$$Q(x) = P(x+d) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x^k d^{i-k} = \sum_{k=0}^{n} x^k \left(\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i d^{i-k} \right).$$

Ale

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i d^{i-k} \underset{d\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \text{bo } a_n > 0.$$

Wyniki Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki

Komisja Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki, obradując dnia 9 września 1991 roku w Katowicach w składzie: Zdzisław Pogoda – przewodniczący, Jerzy Bednarczuk, Piotr Hajłasz, Marek Kordos, Andrzej Mąkowski, Zofia Muzyczka, Agnieszka Wojciechowska, Michał Wojciechowski, biorąc pod uwagę wybór tematu, poziom pracy i przebieg obrony, postanowiła przyznać:

1. złoty medal i nagrodę w wysokości zł 700.000,- Marcinowi Kasperskiemu z IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie, za pracę *27 zbiorów wypukłych bez środka symetrii*,
2. srebrny medal i nagrodę w wysokości zł 700.000,- Grzegorzowi Zwarze z IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, za pracę *Wspólne punkty stałe wielomianów komutujących*,
3. brązowy medal i nagrodę w wysokości zł 350.000,- Małgorzacie Sęk z Zespołu Szkół Zawodowych im. Edwarda Dembowskiego w Wieliczce za pracę *Łamane spiralne*,
4. wyróżnienie i nagrodę w wysokości zł 350.000,- Mikołajowi Rotkiewiczowi z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Wzór na n-tą liczbę pierwszą*,
5. dyplom uczestnictwa w finale Zbigniewowi Romanowskiemu z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Różniczkowanie ciągów i co z tego wynika...*,
6. nagrody pieniężne opiekunom prac: Krzysztofowi Chełmińskiemu i Bronisławowi Pabichowi po zł 300.000,- oraz Henrykowi Pawłowskiemu i Mirosławowi Usckiemu po zł 150.000,-.