Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1992

Zadania z matematyki nr 231, 232

Redaguje Marcin E. KUCZMA

231. Dowieść, że miary kątów α, β, γ trójkąta ostrokątnego spełniają nierówność
$$\sqrt{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \ge 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2.$$

232. „Zwinąć" (tj. przedstawić w prostszej postaci) sumy
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2j}\binom{n-2j}{2k-2j} \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{2j+1}\binom{n-2j-1}{2k-2j-1}$$
(n oraz k są danymi liczbami naturalnymi, $n \ge 2k$).
Zadanie **232** zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1991.
Przypominamy treść zadań:

223. W trójkącie ABC: $|\angle C| = 3\cdot|\angle A|$. Dowieść, że wysokość opuszczona z wierzchołka C jest krótsza niż $\frac{1}{2}|AB|$.

224. Liczba naturalna $n > 1$ jest dzielnikiem liczby $p-1$, gdzie p jest dzielnikiem pierwszym liczby $n^3 - 1$. Znaleźć związek między p i n.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 217 (WT=3,54) i 218 (WT=1,82)
z numeru 3/1991

Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	42,82
Paweł Kubit	– Krosno	41,50
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48

223. Niech D będzie spodkiem rozważanej wysokości; oznaczmy jej długość przez h. Miary kątów CAB i ABC oznaczmy krótko przez A i B oraz przyjmijmy $\varphi = 2A$; $0° < \varphi < 90°$. Zatem $|AD| = h\mathrm{ctg}A$, $|BD| = \varepsilon h\mathrm{ctg}B$ (gdzie ε równa się 1 lub -1 w zależności od tego, czy kąt B jest ostry, czy rozwarty). Stąd
$$\frac{1}{h}|AB| = \frac{1}{h}(|AD| + \varepsilon|BD|) = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}(180° - A - 3A) =$$
$$= \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} - \mathrm{ctg}2\varphi = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{2\cos^2\varphi - 1}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin 2\varphi} > 2\,.$$

224. Liczba p, jako dzielnik pierwszy iloczynu $(n-1)(n^2+n+1)$, musi dzielić jeden z czynników. Nie jest ona dzielnikiem liczby $(n-1)$ (bo z założenia $n \le p-1$); dzieli więc drugi czynnik. Dostajemy równość

$$n^2 + n + 1 = kp \tag{1}$$

dla pewnej liczby naturalnej $k \ge 1$. Jednocześnie mamy (z założenia) równość $p - 1 = ln$ dla pewnej liczby naturalnej $l \ge 1$. Zatem (1) przybiera postać

$$n^2 + n + 1 = k(ln+1) \tag{2}$$

lub inaczej:

$$k = mn + 1\,, \tag{3}$$

gdzie $m = n + 1 - kl \ge 0$. Podstawiamy (3) do (2) i otrzymujemy $n^2 + n + 1 = (mn+1)(ln+1)$, a stąd

$$n(1 - lm) = l + m - 1 \ge 0\,. \tag{4}$$

Tak więc $lm \le 1$, co oznacza, że $m = 0$ (bowiem para $(l,m) = (1,1)$ nie spełnia (4)). Stąd wobec (3) i (1) wnosimy, że $k = 1$ oraz
$$n^2 + n + 1 = p\,.$$

Jest to szukany związek. (Oczywiście, jeśli dla pewnej pary (p,n) związek ten zachodzi, przy czym p jest liczbą pierwszą, to spełnione są wszystkie warunki zadania.)

Zadania z fizyki nr 129, 130

Redaguje Jerzy B. BROJAN

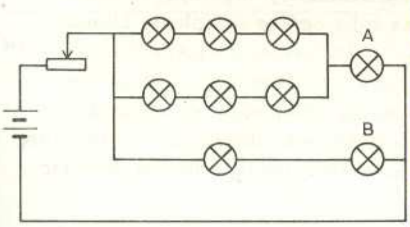
129. Cienki, nierozciągliwy i jednorodny łańcuszek o masie m i długości l został zawieszony za jeden z końców w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Nadajemy mu prędkość kątową ω wokół pionowej osi przechodzącej przez punkt zawieszenia, tak że w obracającym się układzie odniesienia łańcuszek osiąga stan równowagi (można przyjąć, że łańcuszek ma własności mechaniczne łańcucha rowerowego, tzn. odkształca się bez oporu w jednej płaszczyźnie, zachowując sztywność w drugiej). Jaka jest minimalna wartość prędkości kątowej, przy której możliwy jest stan równowagi różny od zwisu wzdłuż prostej pionowej? Wykazać, że ta minimalna prędkość kątowa jest proporcjonalna do $\sqrt{\frac{g}{l}}$ (nie zależy od m) i obliczyć numerycznie stałą proporcjonalności.

130. W dwóch jednakowych naczyniach znajduje się ta sama ilość tego samego gazu o tej samej temperaturze początkowej; na zewnątrz naczyń jest próżnia. Otwarto mały otworek w każdym naczyniu, tak że gaz zaczął wypływać. Otworki różnią się wielkością: w pierwszym naczyniu otwór ma średnicę mniejszą od średniej drogi swobodnej cząsteczek, a w drugim ma średnicę znacznie większą od średniej drogi swobodnej. Przez oba otworki wypuszczono jednakową ilość gazu (w ciągu niejednakowego czasu). W którym naczyniu gaz oziębił się silniej? Dopływ ciepła z naczynia i z otoczenia pominąć.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1991

Przypominamy treść zadań:

121. Astronauci podróżujący rakietą w przestrzeni kosmicznej nagle wykrywają pocisk znajdujący się w odległości r i poruszający się wprost w ich kierunku z prędkością względną v. Pocisk nie ma napędu i wybucha w chwili największego zbliżenia do rakiety. W jakim kierunku astronauci powinni skierować dyszę silnika, aby minimalna odległość od pocisku miała wartość maksymalną? Rakieta z włączonym silnikiem porusza się ze stałym przyspieszeniem a. Jeśli pocisk nie wybucha, ale wysyła promienie γ, to czy opisany powyżej optymalny kierunek dyszy gwarantuje pochłonięcie najmniejszej dawki?



122. W obwodzie przedstawionym na rysunku wszystkie żaróweczki są jednakowe. Jakim wzorem wyraża się zależność prądu przepływającego przez żaróweczkę od przyłożonego napięcia, jeśli żaróweczka A pali się tak samo jasno jak B, przy każdym nastawieniu potencjometru?

121. Wprowadźmy oś x w kierunku rakieta-pocisk (w chwili początkowej), niech x oznacza długość rzutu odcinka łączącego rakietę i pocisk na tę oś, przez y oznaczmy długość analogicznego rzutu na kierunek prostopadły, a siła napędowa niech będzie skierowana pod kątem α do osi x (oczywiście, „do tyłu" względem pocisku). Zależność zmiennych x i y od czasu wyrażają wzory

$$x = r - vt + \frac{1}{2}a\cos\alpha t^2, \quad y = \frac{1}{2}a\sin\alpha t^2 .$$

Kwadrat wzajemnej odległości rakieta-pocisk możemy uważać za funkcję dwóch zmiennych – t i α

$$x^2 + y^2 = f(t,\alpha).$$

Należy znaleźć minimum tej funkcji ze względu na t, a następnie maksimum ze względu na α. Jeśli wyobrazić sobie trójwymiarowy wykres funkcji f, to szukane ekstremum odpowiada na nim „siodłu" lub „przełęczy" i widać, że są w nim spełnione warunki

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 .$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania

$$t = \frac{r}{v}, \quad \cos\alpha = \frac{ar}{v^2},$$

lub też

$$t = \frac{v}{a}, \quad \alpha = 0 .$$

Pierwsze rozwiązanie daje minimalną odległość równą $\frac{1}{2}at^2 = \frac{ar^2}{2v^2}$, a drugie – równą $r - \frac{v^2}{2a}$. Nietrudno więc sprawdzić, że pierwsze obowiązuje dla $ar \le v^2$, a drugie dla $ar \ge v^2$.

Odpowiedź na drugie pytanie jest trudniejsza, gdyż dawka promieniowania jest proporcjonalna do całki $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{x^2+y^2}$. Metodami numerycznymi można znaleźć kąt minimalizujący tę całkę dla różnych wartości parametru ar/v^2:

ar/v^2	0,2	0,5	1	1,5	≥1,7
α	89°	82°	62°	32°	0

Widzimy, że kąt ten jest inny (na ogół większy) od poprzednio wyliczonego.

122. Ponieważ A i B palą się jednakowo, więc przez każdą z sześciu żaróweczek połączonych z A przepływa prąd o natężeniu równym $\frac{1}{2}$ natężenia prądu przepływającego przez B i C, natomiast spadek napięcia na każdej z tych sześciu żaróweczek jest równy $\frac{1}{3}$ spadku napięcia na C. Jeśli więc zapiszemy charakterystykę prądowo-napięciową w postaci wzoru $U = f(I)$, to otrzymujemy $3U = f(2I) = 3f(I)$. Rozwiązaniem tych równań jest funkcja $f(I) = cI^\alpha$, gdzie $\alpha = \log_2 3 = 1,585$, c jest dowolną stałą.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 115 (WT=2,40) i 116 (WT=3,07) z numeru 3/1991

Paweł Perkowski	– Szczecin	32,65
Adam Sikorski	– Lublin	25,97
Anna Gluza	– Toruń	24,35
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	11,77
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	10,48