Rozwiązanie zadania F 323. Niech R oznacza promień lokalnej krzywizny stołu, r – promień kulki, m zaś jej masę. Składowa siły ciężkości styczna do blatu w przypadku małych drgań wynosi

$$mg\sin\alpha \approx mg\frac{x}{R-r} \approx mg\frac{x}{R}.$$

Pisząc równanie drugiej zasady dynamiki ruchu postępowego oraz zasadę dynamiki ruchu obrotowego mamy

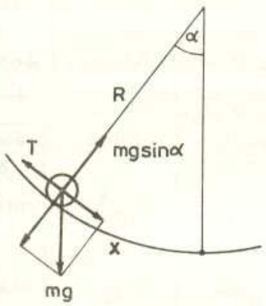
$$\begin{cases} mg\frac{x}{R} - T = ma \\ T \cdot r = I\frac{a}{r}, \end{cases}$$

gdzie a jest promieniem kulki, $I = \frac{2}{5}mr^2$ jej momentem bezwładności, T zaś siłą tarcia. Z powyższych równań wyznaczamy

$$ma = \frac{5}{7}mg\frac{x}{R}.$$

Kulka wykonuje drgania harmoniczne, $ma = m\omega^2 x$, $\omega = \frac{2\pi}{t}$, stąd ostatecznie otrzymujemy

$$R = \frac{5}{7}\frac{g}{4\pi^2} \cdot t^2 \approx 71 \text{ cm}.$$



Rozwiązanie zadania M 618. Kładziemy $x_n = 4\{n\sqrt{2}\}$ (symbol $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby x). Jeżeli p i q są takimi liczbami naturalnymi, że $p < (4-\sqrt{2})q$, to

$$(*) \qquad \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)} > \frac{1}{4q^2}$$

(skorzystaliśmy z niewymierności $\sqrt{2}$). Korzystając z (*) mamy dla $m > n \geq 1$

$$|4\{m\sqrt{2}\} - 4\{n\sqrt{2}\}| =$$
$$= 4|(m-n)\sqrt{2} - (\lfloor m\sqrt{2}\rfloor - \lfloor n\sqrt{2}\rfloor)| =$$
$$= 4(m-n)\left|\sqrt{2} - \frac{\lfloor m\sqrt{2}\rfloor - \lfloor n\sqrt{2}\rfloor}{(m-n)}\right| \geq$$
$$\geq \frac{1}{m-n}.$$

Mogliśmy skorzystać z(*), albowiem: $\lfloor m\sqrt{2}\rfloor - \lfloor n\sqrt{2}\rfloor < m\sqrt{2} - n\sqrt{2} + 1 \leq$ $\leq (m-n)(\sqrt{2}+1) < (4-\sqrt{2})(m-n)$.

Istnieją zresztą jeszcze inne hipotezy, które co prawda nie są tak powszechnie akceptowane, wydają się jednak również bardzo interesujące. Zgodnie z jedną z nich powodem występowania epok lodowcowych może być wzmożona aktywność wulkaniczna na Ziemi. Gazy i popiół wyrzucone z wulkanów mogą istotnie zmniejszać przezroczystość atmosfery, a tym samym utrudniać docieranie energii promienistej Słońca. Okresowe ochładzanie klimatu może być również związane z docieraniem Słońca (wraz z całym Układem Słonecznym) do obszaru ramienia spiralnego Galaktyki, a więc do obszaru o podwyższonej gęstości gazu i pyłu. Mechanizm oziębiania klimatu jest w tym przypadku podobny do wspomnianego przy okazji hipotezy wulkanicznej – zanieczyszczona atmosfera ziemska osłabia znacznie docierające do nas promieniowanie słoneczne. Z dość ogólnych rozważań na temat dynamiki naszej Galaktyki wynika, że Słońce obiega jej centrum z prędkością kątową $\omega_\odot = 8 \cdot 10^{-16}$/s, natomiast jej struktura spiralna obraca się sztywno z prędkością $\Omega_p = 4 \cdot 10^{-16}$/s. Ponieważ prawdopodobnie ramiona spiralne są dwa, to częstość, z jaką je Słońce spotyka, wynosi $(\omega_\odot - \Omega_p)/\pi = 1,27 \cdot 10^{-16}$/s, a więc okres między dwoma kolejnymi przejściami przez ramię powinien wynosić 250 mln lat, co zgadza się ze wspomnianym na wstępie okresem rozdzielającym występowanie ziemskich epok lodowcowych. Wydaje się, że obecnie znajdujemy się blisko wewnętrznej krawędzi jednego ramienia. Oznaczałoby to, że niecałe 250 mln lat temu Układ Słoneczny przechodził przez ramię spiralne po raz ostatni. To już nie bardzo odpowiada datowaniu przedostatniej epoki lodowcowej. W ogóle sprawa jest dużo bardziej zawiła, gdyż struktura Galaktyki w pobliżu Słońca jest mocno skomplikowana i nie jest łatwo określić położenie Słońca względem ramienia; nie wiadomo w gruncie rzeczy, ile tych ramion jest. W rezultacie całe zagadnienie jest na razie raczej wdzięcznym polem do spekulacji niż do ścisłych naukowych rozważań.

Tak więc pierwsza z wymienionych hipotez wydaje się najściślejsza i jest preferowana wśród naukowców. Zbyt pochopnym byłoby jednak odrzucanie pozostałych – jest całkiem prawdopodobne, że wszystkie czynniki mają wpływ na kształtowanie klimatu ziemskiego, pozostaje tylko pytanie, który z nich jest czynnikiem dominującym.

Jak mierzono Ziemię w starożytności

Już w starożytności zdawano sobie sprawę z faktu, że Ziemia jest kulista. Główną przyczyną, dla której tak sądzono, był odmienny wygląd nieba obserwowanego z różnych miejsc na Ziemi. Ponadto przemawiało za tym to, że podczas zaćmień Księżyca cień na Księżycu ma kształt kolisty. Do tych argumentów Arystoteles dodał jeszcze dwa o charakterze raczej filozoficznym, a mianowicie: tym, co miało przemawiać za kulistością Ziemi, była symetria i równowaga.

Różnice w wyglądzie nieba posłużyły Posidoniusowi i Eratostenesowi do oszacowania rozmiarów Ziemi. Posidonius założył, że Aleksandria i Rodos znajdują się na tym samym południku, ich odległość zaś oszacował na 5000 stadionów. Stwierdził, że gwiazda Canopus, obserwowana z Rodos, dochodzi zaledwie do horyzontu, obserwowana zaś z Aleksandrii w punkcie kulminacyjnym znajduje się na wysokości będącej 1/48 częścią kąta pełnego. Stąd oszacował on obwód Ziemi na $48 \cdot 5000 = 240\,000$ stadionów. Podobnie Eratostenes porównując położenie Słońca podczas letniego przesilenia, obserwowanego z różnych miast, oszacował obwód Ziemi na 252 000 stadionów.

Jest jednak problem ze sprawdzeniem dokładności tych obliczeń, bowiem długość stadionu nie była dokładnie ustalona i rozbieżności są tutaj bardzo duże. I tak np. długość stadionu olimpijskiego wynosiła 192,27 m, stadionu zaś pytyjskiego tylko 177,35 m. Podstawiając długość stadionu olimpijskiego do obliczeń Posidoniusa otrzymamy w przybliżeniu 46.000 km, co daje dosyć dobre przybliżenie.

Piotr HAJŁASZ