



Znaczek wydany w Czecho-Słowacji z okazji dwusetnej rocznicy urodzin Bernharda Bolzano.

O własności Darboux

Własność przyjmowania wartości pośrednich, zwana także własnością Darboux, jest powszechnie znana – wielu Czytelników *Delty* spotkało się z nią na lekcjach w szkole. Przypomnijmy: funkcja f o wartościach rzeczywistych określona na przedziale $[x, y]$ ma tę własność, gdy dla dowolnych a, b , takich, że $x \leq a \leq b \leq y$ przyjmuje w przedziale $[a, b]$ wszystkie wartości między $f(a)$ i $f(b)$. W szczególności mają własność Darboux funkcje ciągłe; fakt ten jest intuicyjnie prosty, często wykorzystywany przy rozmaitych zadaniach (np. dowodach istnienia pierwiastka pewnych równań). Korzystaliśmy z niej i my, w *EPSILONIE* (nr 9).

Mogłoby się wydawać, że jeśli jakąś własność opatrzone nazwiskiem, to powinno to być nazwisko odkrywcy. W tym przypadku tak nie jest! Fakt przyjmowania wartości pośrednich przez funkcję ciągłą został udowodniony przez Bernharda Bolzano w pracy opublikowanej w roku 1817. Bolzano przedstawił pełny dowód w oparciu o precyzyjną, sformułowaną przez siebie, definicję ciągłości. Warto również zaznaczyć, że o prawdziwości tego faktu przekonani byli chyba wszyscy wielcy matematycy XVIII wieku. O tym, iż właśnie Bolzano jako pierwszy wykazał omawiane twierdzenie, przypomniał Hugo Steinhaus w *Wiadomościach Matematycznych* w roku 1963.

Kim był Bernhard Bolzano? Całe życie (1781 – 1848) spędził w Pradze. Był profesorem na tamtejszym uniwersytecie, zajmował się teologią, matematyką i filozofią. Przez wielu

historyków uważany dziś jest za Czecha, chociaż ojciec jego pochodził z Włoch, a on sam pisał tylko po niemiecku. Steinhaus sugerował, by nazywać go raczej Austriakiem. Bolzano wprowadził sporo nowych pojęć i sformułował wiele twierdzeń, które niezależnie odkrywali później m.in. tacy matematycy, jak Cauchy czy Weierstrass. Współczesnym jednak nie był zbyt znany, gdyż pracował w istotnej odległości od ówczesnych głównych ośrodków matematycznych.

A jak w tej historii pojawił się Jean Gaston Darboux? Darboux, żyjący w latach 1842 – 1917 zajmował się przede wszystkim geometrią różniczkową. Gdy rozpoczął swoją twórczą działalność w matematyce, wiadomo było już o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcje ciągłe określone na przedziale. Otóż Darboux pod koniec XIX wieku wykazał, że własność przyjmowania wartości pośrednich ma także funkcja pochodna. Dziś mówimy: pochodna ma własność Darboux. Funkcja różniczkowalna wcale nie musi mieć ciągłej pochodnej (np. funkcja przyjmująca wartość 0 w zerze, dla $x \neq 0$ zaś mająca wartości równe $x^2 \sin \frac{1}{x}$), niemniej jednak owa pochodna też przyjmuje w przedziale $[a, b]$ wszystkie wartości między $f'(a)$ i $f'(b)$. Ten fakt jest intuicyjnie daleko mniej oczywisty, niż analogiczna własność funkcji ciągłych... I to właśnie udowodnił Darboux, nb. pisząc w tej samej pracy o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcje ciągłe jako rzeczy ogólnie znanej w matematyce.

Ananiasz POŚMIECHOWSKI

Zamieszczony poniżej rysunek przysłał nam kolega przebywający na stypendium w USA. Nie jest mu znany autor rysunku. Wydaje nam się, że przekład na język polski nie jest konieczny, a nawet wręcz niewskazany; w przypadku problemów odsyłamy do literatury specjalistycznej z zakresu informatyki.

