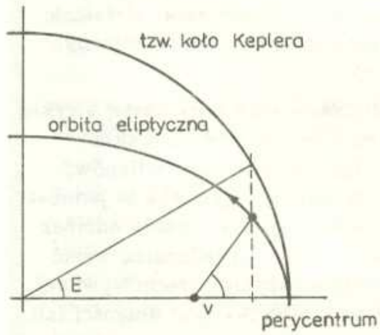
Co Hipparch widział gołym okiem?

Tomasz KWAST

Podręczniki szkolne, a nawet akademickie, zazwyczaj zawierają rozdział „Dowody kulistości Ziemi", albo „Dowody ruchu ... Ziemi" czy temu podobne. Problem jest może niebanalny, ostatecznie może być ciekawe, jak nie ruszając się z laboratorium przekonać się, że Ziemia się obraca. Prawdopodobnie jednak w dzisiejszych czasach nikt tak naprawdę nie ma wątpliwości, że Ziemia jest kulista, że się obraca i obiega Słońce, niektórzy nawet wiedzą, że po elipsie, i wszelkie dowodzenia tego nie przynoszą studiującemu żadnych nowych informacji, stanowią jedynie rodzaj umysłowej gimnastyki. Co prawda, eliptyczność orbity ziemskiej nie jest tak całkiem oczywista i dlatego może być interesujące poznanie, jak z tym problemem radzili sobie uczeni w starożytności.

Ziemia była wtedy środkiem świata i wokół niej obracały się jednostajnie sfery Wszechświata – w każdym razie w takiej wersji najczęściej się to słyszy. Trzeba jednak pamiętać, że już w czasach Hipparcha, kiedy astronomią zajmowano się dość poważnie, wiadomo było, że Słońce porusza się po niebie niejednostajnie. Nie wystarczał więc prymitywny model jednej jednostajnie obracającej się wokół Ziemi sfery z osadzonym na niej Słońcem. Bo to, że ma to być sfera (lub sfery) i że ma (lub mają) się obracać jednostajnie, to były założenia, od których odstąpić nie przyszłoby nikomu do głowy. Trzeba było wobec tego wymyśleć taką konstrukcję, która nie rezygnując z tych założeń dawałaby zgodność z obserwacjami. I Hipparch ją wymyślił. Jest zaskakujące, jak prosto można tę zgodność uzyskać.



Rys. 1

Położenie ciała na orbicie (w tym przypadku będzie to Słońce na orbicie okołoziemskiej – to nic, że akurat powinno być odwrotnie; w tym ujęciu łatwiej mówić o porównywaniu teorii z obserwacjami) można opisać podając np. kąt v między kierunkiem na to ciało a kierunkiem na perycentrum (rys. 1). Nazywa się on anomalią prawdziwą. Niestety, kąt ten narasta niejednostajnie w czasie i nie daje się jego zależności od czasu elementarnie zapisać. Daje się to zrobić za pomocą innego kąta E, zwanego anomalią mimośrodową. Mianowicie okazuje się, że dla ruchu po elipsie jednostajnie w czasie narasta wielkość M, zwana anomalią średnią,

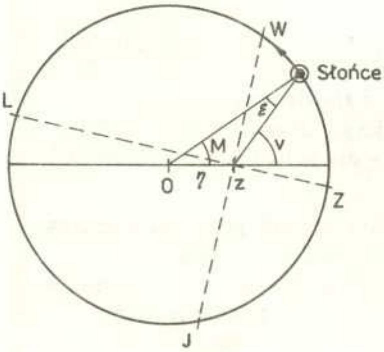
$$M = E - e\sin E = \sqrt{\mathrm{G}(M_\odot + m)}\, a^{-3/2} t\,,$$

gdzie e oznacza tu mimośród orbity Słońca, t czas liczony od chwili jego przejścia przez perygeum, a wielką półoś orbity, $M_\odot$ masę Słońca, m masę Ziemi, G stałą grawitacji. Na podstawie rysunku 1 można nietrudno przekonać się, że

$$\mathrm{tg}(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\,\mathrm{tg}(E/2)\,,$$

za to jako nieco trudniejsze ćwiczenie z rachunków można polecić znalezienie rozwinięcia w szereg $v(M)$. Wynikiem jest:

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \ldots$$



Rys. 2

Powróćmy znowu do Hipparcha. Zauważył on, że jednostajny ruch (Słońca) po kole będzie obserwowany jako niejednostajny z punktu położonego poza środkiem koła. Spróbujmy więc tak dobrać położenie tego punktu, czyli Ziemi, by otrzymać najlepszą zgodność z obserwacjami. Niech Ziemia leży w odległości $OZ = \eta$ od środka orbity słonecznej; wielkość ta (dokładniej $\eta = OZ/OS$, ale OS można tu przyjąć za jednostkę) zwana była mimośrodem Hipparcha. Z twierdzenia sinusów $OZ/\sin\varepsilon = OS/\sin v$, a ponadto $v = M + \varepsilon$. Wobec tego

$$\sin\varepsilon = \eta\sin(M+\varepsilon) = \eta\sin M\cos\varepsilon + \eta\cos M\sin\varepsilon\,.$$

skąd

$$\mathrm{tg}\varepsilon = \frac{\eta\sin M}{1-\eta\cos M}\,.$$

Skoro kąt ε jest mały, to $\mathrm{tg}\varepsilon \approx \varepsilon$, a wtedy rozwinięcie ostatniego tangensa w szereg da

$$v = M + \eta \sin M + \frac{1}{2}\eta^2 \sin 2M + \dots$$

Widać, że mimośród Hipparcha η jest równy podwojonemu mimośrodowi orbity Słońca (Ziemi) $\eta = 2e$. Hipparch wyznaczył go znając czasy trwania pór roku. Niech wartości anomalii prawdziwej i średniej w punktach stanowisk Słońca (W – wiosennego, L – letniego, J – jesiennego, Z – zimowego) wynoszą odpowiednio v_1, v_2, v_3, v_4 i M_1, M_2, M_3, M_4. Zachodzi, oczywiście,

$$v_2 - v_1 = v_3 - v_2 = v_4 - v_3 = \pi/2,$$

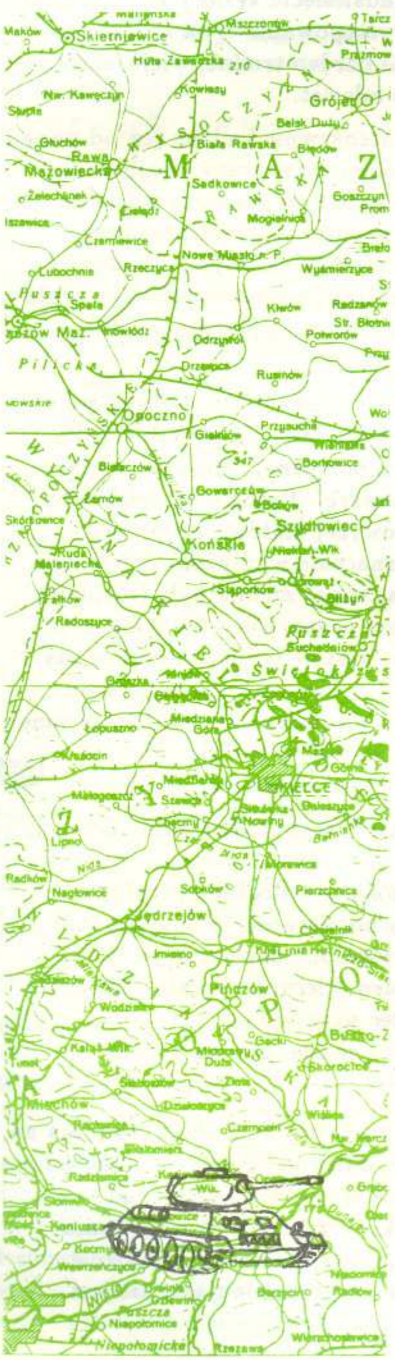
różnice zaś

$$M_2 - M_1, \quad M_3 - M_2, \quad M_4 - M_3$$

są znane jako proporcjonalne do czasu trwania wiosny, lata i jesieni, M ma bowiem narastać jednostajnie w czasie. Z rozwinięcia w szereg wynika wtedy

$$v_2 - v_1 = (M_2 - M_1) + \eta(\sin[M_1 + (M_2 - M_1)] - \sin M_1) + \dots,$$

gdzie niewiadomymi są η i M_1. Drugie równanie może zawierać np. $v_3 - v_1$, tak czy inaczej mimośród Hipparcha można w końcu wyznaczyć. Hipparch znalazł w ten sposób $\eta = 1/24$, czyli wartość dość zbliżoną do prawdziwej, która jest równa około 1/30 (por. artykuł A. Majhofera w *Delcie* 5/1984). Z porównania współczynników przy $\sin 2M$ widać, że błąd położenia Słońca na niebie w modelu Hipparcha może wynieść najwyżej $\frac{3}{4}e^2$ radianów, tj. $0{,}'72$. Jest to mniej niż zdolność rozdzielcza oka, czyli tak prosty model zapewnia już maksymalną zgodność z obserwacjami prowadzonymi gołym okiem! Nawiasem mówiąc, rysując orbity planet Układu Słonecznego, obojętne w jakiej skali, niepodobna dostrzec ich spłaszczenia (mimośrody wszystkich orbit są dość małe), można natomiast dopatrzeć się, że Słońce nie leży dokładnie w ich środku, przynajmniej niektórych. Lepszy model można było opracować dopiero po wynalezieniu teleskopu. I tak się stało, a zrobił to – jak wiemy – Kepler półtora tysiąca lat poźniej wprowadzając zamiast skomplikowanego układu deferensów i epicykli po prostu elipsy.



Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 616. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór wielokątów, z których każde dwa mają punkt wspólny. Udowodnić, że istnieje prosta, która ma punkty wspólne ze wszystkimi wielokątami.
Rozwiązanie na str. 12

M 617. Czy istnieje taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że ciąg o n-tym wyrazie będącym sumą cyfr liczby $P(n)$ jest rozbieżny do nieskończoności? (Przyjmijmy, że suma cyfr liczb k i $-k$ jest taka sama.)
Rozwiązanie na str. 12

M 618. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony ciąg ograniczony (x_k), że dla dowolnych n i m zachodzi

$$|x_n - x_m| \geq \frac{1}{|n-m|}.$$

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

F 323. Na stole mała metalowa kulka wykonuje drgania o okresie $t = 2$ s. Jaki jest promień lokalnej krzywizny stołu? Zakładamy, że kulka porusza się bez poślizgu.
Rozwiązanie na str. 9

F 324. Kropla wody o promieniu $R = 1$ mm spada z kranu i rozpryskuje się w zlewie położonym o $h = 20$ cm niżej. Na jaką maksymalną liczbę n małych identycznych kropelek może rozprysnąć się ta kropla? Napięcie powierzchniowe wody $\sigma = 0{,}073$ N/m.
Rozwiązanie na str. 5