Właśnie dlatego Ziemia nie została jeszcze zmuszona do obrotu synchronicznego z Księżycem. Warto jednak wiedzieć, że istnieją geologiczne dowody na to, że ruch obrotowy Ziemi jest spowalniany. W muzeum historii naturalnej Smithsonian Institution w Waszyngtonie znajduje się odłamek dawnej rafy koralowej pochodzący sprzed kilkuset milionów lat. Rafa koralowa jest szkieletem żywego organizmu i, dopóki organizm żyje, stale rośnie. Geolodzy potrafią rozpoznać warstwy przyrostu dziennego rafy i po charakterystycznych, cyklicznie powtarzających się układach warstw dziennych rozpoznają przyrosty roczne. Okazuje się, że w czasach, gdy rafa z muzeum żyła, rok miał 390 dni. Nie są znane przyczyny, dla których mogłaby zmaleć długość roku na Ziemi (wiązałoby się to z przyspieszeniem ruchu orbitalnego, a więc zbliżeniem Ziemi do Słońca – tak wyraźna zmiana w ciągu kilkuset milionów lat nie byłaby możliwa do wytłumaczenia). Wniosek jest tylko jeden: Ziemia obraca się dziś wolniej, a za spowolnienie obrotu odpowiedzialne są przypływy.

Siły pływowe mogą wywoływać też inne efektowne zjawiska. Jeśli są wystarczająco duże, mogą spowodować rozerwanie gwiazdy, planety lub księżyca na fragmenty. Możliwe, że ich działaniu zawdzięczają też istnienie pierścienie pyłowe wokół planet. Wyobraźmy sobie, że na orbicie wokół gwiazdy lub planety znalazł się obłok małych obiektów (podobny do tego, o którym już mówiliśmy), związany siłami grawitacyjnymi na tyle słabo, że własne pole grawitacyjne obłoku jest za małe dla powstrzymania rozciągającego działania sił pływowych. Wówczas, jak to już opisaliśmy, część obłoku bliższa ciału przyciągającemu będzie systematycznie wyprzedzać część zewnętrzną i po dostatecznie dużej liczbie obiegów wyprzedzi ją o całą orbitę. W tym momencie obłok zamieni się w zamknięty pierścień. Nie próbujemy tu wyjaśnić, jak powstaje początkowy obłok, ale wnioskiem z powyższych rozważań jest następujące stwierdzenie: dla układu wielu małych obiektów krążących po bliskich sobie orbitach naturalnym stanem końcowym jest zamknięty pierścień wokół ciała centralnego, nie zaś obłok o małych rozmiarach.

Przypuśćmy, że obrót księżyca jakiejś planety stał się już synchroniczny, ale jego orbita jest eliptyczna. Ze wzoru na Δg widać, że różnica sił grawitacyjnych po przeciwnych stronach księżyca jest

Zadanie Napoleona

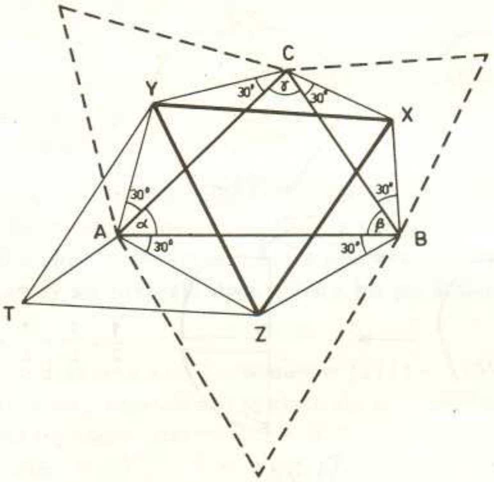
Edmund PUCZYŁOWSKI

Następujące zadanie pochodzi podobno od Napoleona.

Wykazać, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach danego trójkąta ostrokątnego, jest równoboczny.

Przedstawimy tu trzy rozwiązania tego zadania.

1. Dla szkół podstawowych (trzeba znać cechy przystawania trójkątów i umieć wyliczać proste zależności między kątami).

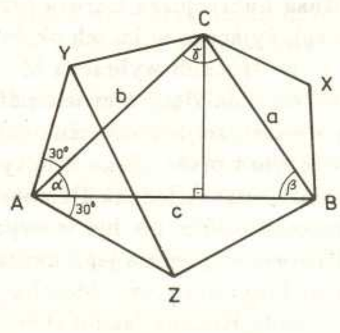


Korzystając z tego, że $AZ = BZ$ możemy zbudować trójkąt ATZ przystający do trójkąta BXZ. Zauważmy, że $AT = BX = CX$, $AY = CY$ oraz

$$\begin{aligned}\angle TAY &= 360^\circ - \angle YAZ - \angle TAZ = 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - \angle XBZ = \\ &= 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - (60^\circ + \beta) = 240^\circ - (\alpha + \beta) = \\ &= 240^\circ - (180^\circ - \gamma) = 60^\circ + \gamma = \angle YCX.\end{aligned}$$

Oznacza to, że trójkąty ATY i CXY są przystające. W efekcie $YT = YX$ oraz $ZT = ZX$, co dowodzi, że przystające są także trójkąty YTZ oraz YXZ. Zauważmy ponadto, że $\angle TYX = 120^\circ$ (bo $\angle TYX = \angle AYC + \angle AYT - \angle CYX$, $\angle AYC = 120^\circ$ i – z przystawania trójkątów ATY oraz CXY – $\angle AYT = \angle CYX$). W efekcie $\angle XYZ = \angle TYZ = 60^\circ$. Podobnie $\angle YZX = 60^\circ$, a więc trójkąt XYZ jest równoboczny.

2. Dla szkół średnich (trzeba coś wiedzieć o trygonometrii).



Zauważmy, że $AY = b/\sqrt{3}$, $AZ = c/\sqrt{3}$ oraz $\angle YAZ = \alpha + 60^\circ$.

Zatem, na podstawie twierdzenia cosinusów,

$$(YZ)^2 = (1/3)(b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^\circ)) =$$
$$= (1/3)(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha)\,.$$

Analogicznie

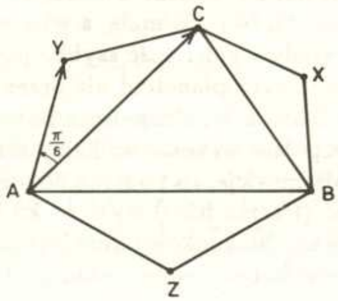
$$(XZ)^2 = (1/3)(a^2 + c^2 - ac\cos\beta + \sqrt{3}ac\sin\beta)\,.$$

Teraz $bc\sin\alpha = ac\sin\beta = 2S$, gdzie S jest polem trójkąta ABC, oraz (z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABC) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Zatem

$$(YZ)^2 = (1/3)(a^2 + bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha) =$$
$$= (1/3)(a^2 + c(c - a\cos\beta) + 2\sqrt{3}S) =$$
$$= (1/3)(a^2 + c^2 - ac\cos\beta + \sqrt{3}ac\sin\beta) = (XZ)^2\,,$$

czyli $YZ = XZ$. Podobnie dowodzimy, że $XY = XZ$.

3. Dla studentów (?) (trzeba coś wiedzieć o... kinematyce).



Załóżmy, że punkty A i B są umocowane, a punkt C porusza się w sposób „gładki". Wraz z nim poruszają się punkty X i Y. Ponieważ kąt między wektorami $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AY}$ jest stale równy $\pi/6$ oraz długość $\overrightarrow{AY}$ jest stale równa $1/\sqrt{3}$ długości $\overrightarrow{AC}$, więc również kąt między wektorami (swobodnymi) prędkości v_Y i v_C punktów Y i C jest stale równy $\pi/6$ oraz długość pierwszego z nich jest równa $1/\sqrt{3}$ długości drugiego. Tak więc $v_Y = (1/\sqrt{3})O_{\pi/6}(v_C)$, gdzie $O_{\pi/6}$ oznacza obrót o kąt $\pi/6$. Podobnie $v_C = \sqrt{3}O_{\pi/6}(v_X)$. W efekcie $v_Y = O_{\pi/3}(v_X)$.

Wybierzmy teraz na płaszczyźnie układ współrzędnych o początku w punkcie Z. Przypomnijmy, że jeśli wektor $\overrightarrow{ZX}$ w chwili t jest równy $(x(t), y(t))$, to wektor prędkości v_X punktu X w chwili t jest równy $(x'(t), y'(t))$, gdzie – jak zwykle – $x'(t)$, $y'(t)$ oznaczają pochodne $x(t)$ i $y(t)$ względem t. Podobnie, jeśli w chwili t $\overrightarrow{ZY} = (x_1(t), y_1(t))$, to w tej chwili $v_Y = (x_1'(t), y_1'(t))$. Jak widzieliśmy, $v_Y = O_{\pi/3}(v_X)$, więc $x_1'(t) = \cos(\pi/3)\cdot x'(t) - \sin(\pi/3)\cdot y'(t)$ oraz $y_1'(t) = \cos(\pi/3)\cdot y'(t) + \sin(\pi/3)\cdot x'(t)$. Wynika stąd, że istnieją takie stałe a, b, że dla dowolnego t $x_1(t) = \cos(\pi/3)\cdot x(t) - \sin(\pi/3)\cdot y(t) + a$ oraz $y_1(t) = \cos(\pi/3)\cdot y(t) + \sin(\pi/3)\cdot x(t) + b$. Oznacza to, że w dowolnym momencie $\overrightarrow{ZY} = O_{\pi/3}(\overrightarrow{ZX}) + \overrightarrow{R}$, gdzie $\overrightarrow{R}$ jest wektorem o współrzędnych a, b. Oczywiście, ruch punktu C możemy dobrać tak, by w pewnym momencie t_0, punkty A, B, C tworzyły trójkąt równoboczny. W tym momencie również punkty X, Y, Z będą tworzyły trójkąt równoboczny. Mamy więc $\overrightarrow{ZY} = O_{\pi/3}(\overrightarrow{ZX})$, co oznacza, że $\overrightarrow{R} = 0$. W efekcie dla dowolnego położenia punktu C, $\overrightarrow{ZY} = O_{\pi/3}(\overrightarrow{ZX})$. Oznacza to, że $\angle YZX = \pi/3$. Podobnie dowodzimy, że pozostałe kąty trójkąta XYZ są równe $\pi/3$.

większa, gdy księżyc znajduje się bliżej planety i mniejsza, gdy jest dalej. Fala przypływu na powierzchni księżyca (powierzchnia ta jest ciałem stałym!) będzie wtedy stać stale w tym samym miejscu powierzchni, ale będzie oscylować w górę i w dół. Energia, której kosztem powstają odkształcenia powierzchni księżyca, to energia ruchu obiegowego po orbicie. Wskutek utraty tej energii księżyc może w końcu spaść na swoją macierzystą planetę lub też jego orbita może stać się kołowa. Zanim do tego dojdzie, praca wykonywana przez oscylującą powierzchnię księżyca wytwarza energię cieplną w jego wnętrzu i może je stopić. Ten mechanizm wytwarzania ciepła jest jedynym wyjaśnieniem, dlaczego na najbliższym z galileuszowych księżyców Jowisza, Io, znajdują się wulkany (erupcje wulkanów na Io zostały sfotografowane przez amerykańską sondę kosmiczną Voyager). Obiekt o dużej masie, jak Ziemia, mógł zachować wystarczająco dużo ciepła we wnętrzu od czasu swojego powstania, lub też nagrzać się od energii rozpadu pierwiastków promieniotwórczych. Mały obiekt, taki jak Io, wystygłby już dawno (podobnie jak np. nasz Księżyc), gdyby nie miał stale działającego źródła energii.

5. Siły pływowe są obiektywnym testem na istnienie pola grawitacyjnego.

Jak już stwierdziliśmy wcześniej, przyspieszenie może znieść grawitację. Może też być użyte do symulowania grawitacji. Czytelnicy wiedzą pewnie, np. z powieści fantastyczno-naukowych, o „sztucznej grawitacji" w pojeździe kosmicznym, którą można wytworzyć przez obrót pojazdu wokół jego osi – siła odśrodkowa będzie wtedy „udawała" siłę grawitacyjną. Nie jest to żadna sztuczka psychologiczna, siły bezwładności i siły grawitacyjne naprawdę działają identycznie na wszystkie układy fizyczne i żadne przyrządy pomiarowe mierzące siłę **w jednym punkcie** nie potrafią rozróżnić tych dwóch sił.

Możliwość odróżnienia grawitacji od sił bezwładności stwarzają właśnie siły pływowe. Wyobraźmy sobie układ inercjalny, w którym nie działają siły grawitacyjne. Wyobraźmy sobie następnie, że w takim układzie zbieramy grupkę małych cząstek materii i następnie wypuszczamy wszystkie cząstki z jednakowymi prędkościami początkowymi (tzn. wszystkie prędkości mają równoległe kierunki oraz jednakowe zwroty i wartości.