Tylko prędkości radialne

Tomasz KWAST

Niebo, a w każdym razie układ gwiazdozbiorów, zawsze robiło wrażenie czegoś majestatycznego i niezmiennego. Jest to, oczywiście, pozór, bowiem rozsiane w przestrzeni gwiazdy przyciągają się grawitacyjnie i muszą się poruszać. Poznanie tych ruchów jest jednym z głównych celów astronomii. Ideałem byłaby możliwość określenia trzech składowych prędkości każdego wybranego obiektu względem Słońca (co prawda, obserwator mieszka na Ziemi obiegającej Słońce, ale uznajmy, że ten ruch Ziemi zawsze da się uwzględnić). Łatwo zgadnąć, że trzeba przy tym znać odległość obiektu. Składowe prędkości styczne do sfery niebieskiej to iloczyny odległości oraz przesunięć kątowych (np. w rektascensji i deklinacji) gwiazdy w jednostce czasu. Same przesunięcia wyznacza się (bezpośrednio na niebie lub na zdjęciach) z dwóch pomiarów konfiguracji gwiazd, przy czym dobrze jest jeżeli te dwie obserwacje dzieli odstęp czasu kilkudziesięcioletni. Gwiazdy są bowiem tak odległe, że w krótszym czasie ich ruch może być po prostu niezauważalny. Najszybciej ($10\overset{''}{.}31$ na rok) biegnie po niebie tzw. gwiazda Barnarda (leży w gwiazdozbiorze Wężownika; gołym okiem jej nie widać); jest ona zresztą również jedną z najbliższych gwiazd (1,8 pc), nic więc dziwnego, że jej ruch na niebie jest tak szybki. Nie trzeba chyba tu dowodzić, że z kolei ruch galaktyk na niebie jest absolutnie niemierzalny.

Trzecią składową prędkości, prostopadłą do sfery niebieskiej, mierzy się jako prędkość radialną v_r na podstawie dopplerowskiego przesunięcia linii widmowych gwiazdy:

$$\nu_{\mathrm{obs}} = \nu_0 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right),$$

gdzie ν_{obs} i ν_0 oznaczają obserwowaną i laboratoryjną częstość fali świetlnej w linii widmowej, a c prędkość światła. W tym przypadku odległość gwiazdy jest nieistotna.

Nietrudno się teraz domyśleć, że dla gwiazd bardziej odległych prędkość radialna jest w ogóle jedyną mierzalną składową prędkości. Czy z tak zubożonego materiału obserwacyjnego można coś sensownego wydedukować? Okazuje się, że można. Wyobraźmy sobie np. układ współrzędnych prostokątnych, względem którego nie porusza się (jako całość) zbiór gwiazd widocznych gołym okiem. Słońce zapewne ma jakąś niezerową prędkość w tym układzie – niech ma ona składowe $U_\odot, V_\odot, W_\odot$. Weźmy dowolną gwiazdę o współrzędnych α, δ. Rzut na ten kierunek (tzn. określony przez te współrzędne) prędkości gwiazdy ($\vec{v}_*$) minus rzut prędkości Słońca jest właśnie obserwowaną prędkością radialną (v_r) gwiazdy, czyli

$$(\text{rzut } \vec{v}_*) - U_\odot \cos\alpha\cos\delta - V_\odot \sin\alpha\cos\delta - W_\odot \sin\delta = v_r\,.$$

Rzut prędkości gwiazdy jest nieobserwowalny, można jednak przyjąć, że dla różnych gwiazd jest on przypadkowy. Jeżeli zatem w powyższym równaniu rzut $\vec{v}_*$ pominąć, a za to ułożyć dużo takich równań (obserwując wiele gwiazd), to dostanie się układ równań, z którego można wyznaczyć $U_\odot, V_\odot, W_\odot$ jako wielkości spełniające go najlepiej np. w sensie najmniejszych kwadratów. Tak znajdujemy składowe prędkości Słońca względem „układu gwiazd okolicznych".

Układ k równań liniowych (a takie są nasze równania) z n niewiadomymi dla $k \geq n$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \ldots + A_{1n}x_n = P_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{k1}x_1 + \ldots + A_{kn}x_n = P_k \end{cases}$$

nie ma na ogół rozwiązania. Wówczas za najlepsze uważa się takie wartości $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ niewiadomych, dla których wyliczone wartości prawych stron równań

$$\begin{gathered} A_{11}\overline{x}_1 + \ldots + A_{1n}\overline{x}_n = L_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{k1}\overline{x}_1 + \ldots + A_{kn}\overline{x}_n = L_k \end{gathered}$$

spełniają warunek:

$$\sum (L_i - P_i)^2 \quad \text{ma wartość najmniejszą.}$$

Istnieją algorytmy obliczania wartości $\overline{x}_i$. Wartości te uważamy za „najlepsze w sensie najmniejszych kwadratów". Szczególnym przypadkiem takiej sytuacji jest wielokrotny pomiar tej samej wielkości – otrzymany wówczas wynik to średnia arytmetyczna pomiarów.

Rozwiązanie zadania F 821. Siła oporu aerodynamicznego jest równa $F = C_x\rho S u^2$, zatem praca dana jest wyrażeniem $W = F \cdot d = C_x \rho S u^2 d$. Praca mechaniczna, jaką wykona silnik, jest równa $W = QV\eta$, gdzie V oznacza objętość spalonej benzyny, η zaś jest sprawnością silnika. Największą sprawność ma silnik pracujący w cyklu Carnota $\eta = 1 - \frac{T_{ch}}{T_k}$, gdzie $T_k = 3000°\mathrm{C} = 3273$ K jest temperaturą kotła, chłodzenie odbywa się za pomocą wody, której temperatura jest równa $T_{ch} \approx 80°\mathrm{C} = 353$ K. Stąd $\eta \approx 0,89$. Porównując wyrażenia na pracę otrzymujemy

$$V = \frac{C_x \rho S u^2 d}{Q\eta} \approx 1,5 \text{ litra}.$$

Rozwiązanie zadania F 822. Niech E oznacza natężenie oświetlenia Słońca, E_1 zaś natężenie oświetlenia obiektu o światłości Słońca, wielkości gwiazdowej m i odległego o r od Ziemi. Stąd

$$m_s = -2,5 \log E + b,$$
$$m = -2,5 \log E_1 + b.$$

Niech I oznacza światłość Słońca. Wówczas

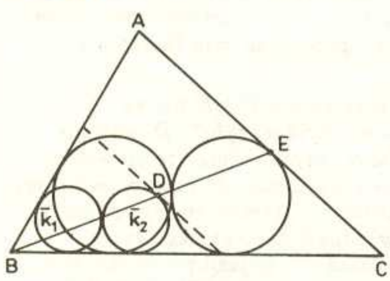
$$E = \frac{I}{R^2} \quad \text{oraz} \quad E_1 = \frac{I}{r^2}.$$

Podstawiając te wyrażenia do wcześniejszych równań i odejmując je stronami otrzymujemy

$$m_s - m = -2,5 \log \frac{r^2}{R^2},$$

stąd $r = R \cdot 10^{\frac{(m-m_s)}{5}} \approx 1$ mln lat świetlnych.

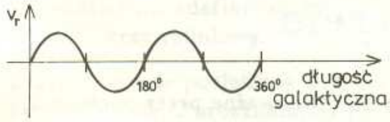
Rozwiązanie zadania M 618. W kąt ABC wpisujemy małe koło $\overline{k}_1$, a następnie rysujemy koło $\overline{k}_2$ o tym samym promieniu styczne zewnętrznie do $\overline{k}_1$ i do $\overline{BC}$ (leżące wewnątrz kąta ABC).



Następnie prowadzimy styczną do $\overline{k}_2$ równoległą do AC i leżącą po przeciwnej stronie $\overline{k}_2$ niż punkt B. Przez punkt D styczności $\overline{k}_2$ z tą równoległą prowadzimy prostą z B aż do przecięcia z AC – oznaczamy to przecięcie E. Jednokładność o środku B i skali $BE : BD$ przeprowadza $\overline{k}_1$ i $\overline{k}_2$ na k_1 i k_2.

Ta prędkość Słońca wynosi około 20 km/s i jest skierowana ku punktowi $\alpha_\odot \approx 18^{\mathrm{h}}$, $\delta_\odot \approx 30°$. Nazywa się on apeksem Słońca i leży w gwiazdozbiorze Herkulesa.

Tak można wyznaczać prędkość Słońca względem dowolnej grupy obiektów (a prawdę powiedziawszy, nawet „względem" promieniowania reliktowego). Np. wykonanie tej procedury dla zbioru gromad kulistych daje jako wynik prędkość obiegową Słońca wokół centrum Galaktyki (lekko zafałszowaną przez prędkość ku apeksowi). W ogóle, sama zależność prędkości radialnych gwiazd leżących w Drodze Mlecznej od długości galaktycznej idealnie interpretuje się przez tzw. rotację różnicową Galaktyki. Rozumie się przez to fakt, że gwiazdy położone w różnych odległościach od centrum Galaktyki obiegają je z różnymi prędkościami – w przybliżeniu jakby według praw Keplera. Zależność ta bowiem, poza, oczywiście, rozrzutem, jest „dwukrotnie zagęszczoną" sinusoidą (rys. 1).

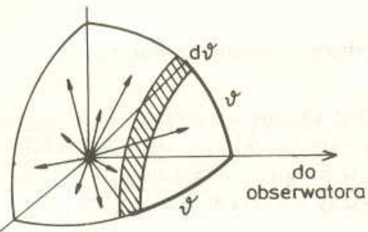


Rys. 1

Rys. 2

Jest to naturalne, bo np. w pierwszym kwadrancie długości galaktycznej (rys. 2) widzimy gwiazdy leżące na orbitach ciaśniejszych niż słoneczna, a więc poruszające się szybciej niż Słońce. Uciekają one zatem przed Słońcem, czyli ich prędkości radialne są dodatnie. W drugim kwadrancie widać gwiazdy poruszające się wolniej, a więc Słońce je dogania i ich prędkości radialne są ujemne itd. Dowodzi to jeszcze ponadto, że istotnie w centrum Galaktyki musi być skupiona dominująca masa.

Założenie losowego rozkładu prędkości umożliwia znalezienie średniej prędkości całkowitej gwiazdy lub galaktyki w gromadzie z pomiarów samych prędkości radialnych. Otóż prędkość radialna $v_r = v \cos\vartheta$, gdzie ϑ jest kątem między wektorem $\vec{v}$ a kierunkiem widzenia (rys. 3) – zakładamy tu, że gromada jako całość ma zerową prędkość radialną.



Rys. 3

Liczba wektorów $\vec{v}$ skierowanych pod kątem ϑ do kierunku widzenia jest proporcjonalna do $\sin\vartheta$ (do pola zacieniowanego na rysunku), zatem średnią prędkość radialną (dokładniej: $\langle|v_r|\rangle$) będzie $\langle v_r\rangle$ zrzutowane na kierunek widzenia i dodatkowo ważone sinusem ϑ, tj.

$$\langle|v_r|\rangle = \int_0^{\pi/2} \langle v\rangle \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2}\langle v\rangle .$$

Analogicznie średni kwadrat prędkości radialnej będzie dany przez

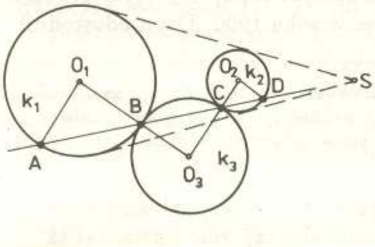
$$\langle v_r^2\rangle = \int_0^{\pi/2} \langle v^2\rangle \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$$

(pamiętajmy, że średni kwadrat to nie kwadrat średniej!). Wyniki te są istotne dla poznania dynamiki gromady, a stąd np. wyznaczenia średniej masy galaktyki w gromadzie.

Obserwacje prędkości radialnych dają też cenne informacje w przypadku pewnych pojedynczych obiektów. Na przykład widmo pierścieni Saturna, gdy szczelina spektrografu ustawiona jest wzdłuż ich dużej osi, ma linie leżące ukośnie, co dowodzi ich różnicowej rotacji. Stąd już od końca ubiegłego wieku wiadomo, że pierścienie zbudowane są z drobnych bryłek obiegających planetę niezależnie. Z kolei widma mgławic planetarnych mają linie rozdwojone w centralnych częściach mgławicy i normalne, pojedyncze na jej brzegach. Jedynym wytłumaczeniem jest założenie, że mgławica jest w przybliżeniu sferyczną warstwą gazu pęczniejącą we wszystkie strony od swojej macierzystej gwiazdy. Wtedy bowiem w centrum obrazu mgławicy obserwator widziałby zarówno masy gazu zbliżające się ku niemu (linie poniebieszczone), jak i oddalające się od niego (linie poczerwienione) – oczywiście gdy dla prostoty rozważań znowu uznać, że mgławica jako całość ma zerową prędkość radialną.

Przedstawione tu przykłady ilustrują zasadę, że jeżeli chcemy z okrojonych obserwacji coś wydobyć, to musimy poczynić dodatkowe założenia, najczęściej, jak widzimy, jakiejś symetrii. Krótko mówiąc – nic za darmo.

Rozwiązanie zadania M 614.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Mamy

$$\angle ABO_1 = \angle O_3BC = \angle O_3CD = \angle DCO_2 = \angle CDO_2$$

(pierwsza i trzecia równość ma miejsce, bo kąty są wierzchołkowe, druga i czwarta – bo trójkąty są równoramienne). Zatem $\overrightarrow{O_1B} \| \overrightarrow{O_2D}$. Stąd w jednokładności o skali dodatniej nakładającej k_1 na k_2 obrazem punktu B jest punkt D. Środkiem takiej jednokładności jest S, a ponieważ prosta łącząca punkt z jego obrazem w jednokładności przechodzi przez środek tej jednokładności, więc prosta BD (czyli BC) przechodzi przez S.

Uwaga: Zadanie to można uogólnić na wiele sposobów. Np. k_3 może być styczne wewnętrznie do k_1 i k_2 – i nawet rozwiązanie pozostanie takie samo. Można też zastąpić warunek, by k_1 i k_2 były rozłączne przez warunek, by jedno nie zawierało się w drugim. Pozostawiając warunek rozłączności można zamienić styczne zewnętrzne na styczne wewnętrzne, ale wtedy k_3 musi być inaczej styczne do k_1 niż do k_2.