O zasadzie najmniejszego działania

Paweł KRAWCZYK

Bloczki, równie pochyłe, wahadła, bąki – oto, z czym zwykle kojarzy się zwrot „mechanika klasyczna”. Czy może być coś interesującego w zagadnieniach tego typu? Czy może być interesująca dziedzina systematycznie badana od trzystu lat, dziedzina, w której chyba wszystkie dające się rozwiązać problemy dawno już rozwiązano? A jednak... Czytelnik byłby zapewne zdziwiony mnogością podręczników z mechaniki klasycznej i to nie tylko tych szacownych, istniejących już od dziesiątków lat, ale też i tych nowych, napisanych ostatnio. Nie jest to bynajmniej przejaw akademickiego zaślepienia ich autorów, którzy poza ukochaną dziedziną nie dostrzegają interesujących tematów. Co prawda, mechanika potrafi urzec swą matematyczną strukturą, precyzją twierdzeń i wielością sformułowań. Nie jest to jednak najistotniejsze. Rzecz raczej w odniesieniu mechaniki do innych dziedzin fizyki, szczególnie tych, które wciąż jeszcze są tworzone. Niektóre bowiem z formalizmów mechaniki klasycznej dają się w naturalny sposób uogólnić i stają się punktem wyjścia dla budowy i opisu nowych działów fizyki. Aktualny stan badań w pozornie nie związanej z mechaniką dziedzinie może więc rzucić nowe światło na mechanikę, zmieniając nasze wyobrażenia o tym, co jest w niej mniej lub bardziej ważne. I to jest bodaj główna przyczyna powstawania wciąż nowych podręczników tej klasycznej już wiedzy.

Przez wiele lat ulubioną metodą fizyków kwantowych, zaczerpniętą z mechaniki klasycznej, był tzw. formalizm kanoniczny. Jednakże osiągnięcia ostatniego dwudziestolecia w teorii cząstek elementarnych i kwantowej teorii pola przywróciły nadszarpnięty autorytet intuicyjnie łatwiejszemu i historycznie wcześniejszemu formalizmowi lagranżowskiemu. Opis niektórych jego aspektów jest tematem naszego artykułu. Notabene, w dziedzinach takich, jak klasyczna teoria pola, podejście lagranżowskie nigdy nie utraciło „palmy pierwszeństwa”.

Wszyscy Czytelnicy *Delty* wiedzą, że mechanikę klasyczną (punktów materialnych) można ująć w formie trzech zasad dynamiki Newtona. Nie jest to jednak sformułowanie jedyne, a nawet – w wielu przypadkach – najwygodniejsze. W naszych rozważaniach oprzemy się na alternatywnym sformułowaniu zwanym zasadą najmniejszego działania.

Rozważmy punkt materialny, którego położenie w dowolnej chwili możemy scharakteryzować przez podanie wektora wodzącego $\vec{r}$. Dowolną funkcję czasu, $\vec{r}(t)$, nazwiemy trajektorią tego punktu (ponieważ nie orzekamy, czy taka właśnie funkcja czasu realizowana jest podczas ruchu, czy też nie, moglibyśmy również mówić o trajektoriach możliwych). Jeżeli w chwili t_A punkt materialny znajdował sie w punkcie A (o wektorze wodzącym $\vec{r}_A$), zaś w chwili t_B znajdzie się w pewnym dowolnym punkcie B (o wektorze wodzącym $\vec{r}_B$), to zasada najmniejszego działania stwierdza, że w czasie ruchu realizowana jest ta spośród wszystkich możliwych trajektorii spełniających warunek

$$\vec{r}(t_A) = \vec{r}_A\,, \quad \vec{r}(t_B) = \vec{r}_B\,,$$

dla której uśredniona względem czasu i pomnożona przez $(t_A - t_B)$ różnica między energią kinetyczną i potencjalną jest minimalna.

Zasada najmniejszego działania należy do najogólniejszych zasad fizyki teoretycznej. Czytelnik może znaleźć więcej informacji o niej w znakomitych *Feynmana wykładach z fizyki*, t. II, cz. 1. Pisaliśmy o niej również w *Delcie* 6/1985.

Dla porządku dodajmy, że tak naprawdę trajektorie muszą spełniać pewne dodatkowe warunki, jak np. różniczkowalność, w pewnych zaś patologicznych przypadkach działanie – bo tak właśnie nazywa się średnia różnica energii kinetycznej i potencjalnej pomnożona przez czas ruchu – nie jest minimalne, lecz na odwrót – maksymalne. Są to jednak komplikacje, o których możemy spokojnie zapomnieć.

Siły pływowe na Ziemi i w Układzie Słonecznym

Andrzej KRASIŃSKI

1. Siły bezwładności.

Wszystko, co trzeba wiedzieć o siłach bezwładności, aby zrozumieć dalszy ciąg artykułu, można znaleźć w moim artykule w *Delcie* 3/1980. Przypomnijmy więc tylko podstawowe fakty w skrócie.

Pierwsze prawo dynamiki Newtona mówi, że ciało, na które nie działają żadne oddziaływania zewnętrzne, będzie poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym albo pozostawało w spoczynku. Stwierdzenie to jest w gruncie rzeczy definicją pewnej klasy układów odniesienia zwanych **układami inercjalnymi**, założeniem zaś mechaniki Newtona jest, że takie układy odniesienia istnieją. Nasze otoczenie jest przeniknięte siłami grawitacyjnymi Ziemi i sąsiednich obiektów astronomicznych i nie jest wcale oczywiste, gdzie należałoby szukać układów inercjalnych.

W układzie, który nie jest inercjalny, ciała niekoniecznie będą poruszały się po liniach prostych albo ze stałymi prędkościami, mogą one doświadczać niespodziewanych zmian kierunku lub przyspieszeń. Przykładem układu nieinercjalnego jest wnętrze autobusu (zakładamy na chwilę, że powierzchnia Ziemi jest układem inercjalnym – wrócimy jeszcze do tego problemu). W przyspieszającym autobusie pasażerowie czują siłę ciągnącą ich do tyłu, w hamującym autobusie pewna siła pcha ich do przodu, na zakręcie zaś podobna siła usiłuje wypchnąć ich na zewnątrz zakrętu. Narciarz rozpoczynający zjazd musi wychylić się do przodu, aby nie upaść na plecy pod wpływem siły, która nie działała na niego, dopóki stał w miejscu. Siły, pojawiające się w układach odniesienia poruszających się ruchem przyspieszonym, są nazywane **siłami bezwładności**. W układzie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}$ siła bezwładności jest równa $-m\vec{a}$, gdzie m jest masą ciała doświadczającego przyspieszenia. Proszę zauważyć, że siła bezwładności ma zwrot przeciwny do wywołującego ją przyspieszenia.

Wyobraźmy sobie teraz ciało o masie m spadające swobodnie w polu grawitacyjnym o natężeniu $\vec{g}$. Siła grawitacyjna działająca na to ciało jest wtedy równa $m\vec{g}$, przyspieszenie w spadku swobodnym wynosi $\vec{g}$, siła bezwładności wynosi więc $-m\vec{g}$, zatem siła wypadkowa działająca na ciało, mierzona w układzie odniesienia spadającym wraz z badanym ciałem, wynosi $m\vec{g} - m\vec{g} = 0$. Ciało spadające swobodnie nie doświadcza więc żadnych sił i jest jedną z możliwych realizacji układu inercjalnego. Zauważmy jednak, że taki układ (nazywany **lokalnym układem inercjalnym**) przestaje być inercjalny w dużych odległościach od swobodnie spadającego ciała. Wystarczy wyobrazić sobie dwa obiekty swobodnie spadające po przeciwnych stronach Ziemi. Każdy z tych obiektów będzie miał niezerowe przyspieszenie względem drugiego, a więc nie będą one dla siebie nawzajem inercjalnymi układami odniesienia.

Jak duży jest lokalny układ inercjalny? Wyobraźmy sobie na chwilę jednorodne pole grawitacyjne (jest to obiekt nieistniejący w realnym świecie). Jego natężenie $\vec{g}$ jest wszędzie takie samo, a więc jakiekolwiek dwa swobodnie spadające ciała będą poruszały się z takim samym przyspieszeniem $\vec{g}$. Względne przyspieszenie tych dwu ciał będzie więc równe zeru, czyli będą poruszać się jedno względem drugiego po linii prostej ze stałą prędkością. Widać stąd, że układ odniesienia związany ze swobodnie spadającym ciałem jest układem inercjalnym w całym obszarze, w którym pole grawitacyjne można uważać za jednorodne.

Rzeczywiste pola grawitacyjne, występujące w przyrodzie, nie są jednorodne. Ich linie sił są zbieżne, a natężenie pola grawitacyjnego zmienia się wzdłuż nich (rośnie w kierunku źródła). Lokalny układ inercjalny jest więc ściśle inercjalny tylko wzdłuż każdego pojedynczego toru spadku swobodnego, i jest w przybliżeniu inercjalny w takim otoczeniu owego toru, w którym zbieżność linii sił jest zaniedbywalnie mała (na przykład, nie może być zmierzona przyrządem pomiarowym o danej dokładności – należy pamiętać, że wielkość układu lokalnego zawsze będzie zależała od dokładności naszych pomiarów).

Zauważmy, że znoszenie sił grawitacyjnych przez siły bezwładności zachodzi nie tylko dla ciał spadających wprost ku środkowi Ziemi. Zachodzi ono także na orbitach

Najkrótsza nawet chwila namysłu nad zasadą najmniejszego działania wskazuje, że stanowi ona sformułowanie mechaniki zgoła zdumiewające. Po pierwsze, różni się ona drastycznie od zasad Newtona i nie jest bynajmniej oczywiste, że obydwa sformułowania są równoważne. Spróbujmy więc wyprowadzić drugą zasadę dynamiki z zasady najmniejszego działania. Nie jest to łatwe, gdyż dziedziną, na której obliczamy działanie, jest zbiór możliwych trajektorii, a więc zbiór funkcji, a nie liczb i nie możemy stosować zwykłych metod szukania ekstremum, o którym mowa w zasadzie. Zaatakujmy więc problem sposobem i podzielmy przedział czasowy $[t_A, t_B]$ na N podprzedziałów o tej samej długości $\Delta t = (t_A - t_B)/N$. Wyróżniamy w ten sposób na osi czasowej $N+1$ równo odległych punktów i zastępujemy uśrednianie energii kinetycznej i potencjalnej względem całego przebiegu czasowego, uśrednianiem względem tych dyskretnych punktów. W celu jeszcze dalszego uproszczenia ograniczymy się wyłącznie do ruchów jednowymiarowych (opisanych zmianami współrzędnej x). Jeśli wybraliśmy dostatecznie małe przedziały Δt, to prędkość w i-tym przedziale jest prawie stała i wynosi w przybliżeniu

$$v_i \simeq \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t},$$

gdzie $x_i = x(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ i $x_0 = x_A$, $x_N = x_B$. Energia kinetyczna przybierze więc postać

$$T_i \simeq \frac{m}{2}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2.$$

Pojawia się teraz pytanie, jaką wielkość wziąć za dyskretną reprezentację energii potencjalnej V. W zwykłym podejściu jest ona ciągłą funkcją położenia $V = V(x)$. Od razu nasuwają się więc cztery możliwe sposoby wyboru energii potencjalnej w i-tym przedziale czasowym: $V(x_i)$, $V(x_{i-1})$, $V(\frac{x_i + x_{i-1}}{2})$, $\frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})]$. Okazuje się, że każdy z nich może być użyty z równie dobrym skutkiem. Tutaj zdecydujemy się na ostatnią możliwość, gdyż nie narusza ona symetrii między końcowymi punktami przedziału (jak pierwsze dwie) i nie wprowadza nowych punktów (jak trzecia). Po tych rozważaniach jesteśmy gotowi do wypisania przybliżonego wzoru na działanie.

$$S \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})]\right\}\cdot(t_A - t_B) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})]\right\}\cdot\Delta t.$$

Przybliżenie nasze jest tym lepsze, im mniej zmienia się na każdym z małych przedziałów Δt prawdziwa wartość energii kinetycznej i potencjalnej, a więc powinno się poprawiać, gdy N rośnie. W granicy $N \to \infty$ $(\Delta t \to 0)$ otrzymujemy prawdziwą wartość działania.

„Wtajemniczeni" bez trudu spostrzegą, że w granicy $N \to \infty$ nasze wyrażenie na działanie staje się całką Riemanna postaci

$$S = \int_{t_A}^{t_B}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x)\right]dt.$$

Funkcja podcałkowa jest równie ważnym obiektem co działanie i nosi nazwę lagranżjanu.

W ujęciu dyskretnym trajektoria staje się po prostu zbiorem liczb $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$. Tym samym, działanie możemy uważać teraz za funkcję $N-1$ zmiennych $x_1, \ldots, x_{N-1}$ (punkty x_0 i x_N są ustalone) i względem tych zmiennych przeprowadzić minimalizację S. Jeśli zasada najmniejszego działania ma być słuszna, to musi zachodzić

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Różniczkowanie powyższe łatwo możemy wykonać explicite: i-ta zmienna występuje jedynie w i-tym i $i{+}1$-szym składniku sumy określającej S. A zatem dostaniemy

$$m\cdot\frac{(x_i - x_{i-1}) - (x_{i+1} - x_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{dV}{dx}\bigg|_{x=x_i} = 0.$$

Nietrudno zauważyć, że w granicy $\Delta t \to 0$ wzór powyższy przybiera postać

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} = 0\,,$$

a ponieważ przyspieszenie definiujemy jako drugą pochodną położenia i z definicji energii potencjalnej wynika, że $-\frac{dV}{dx}$ jest po prostu siłą, tym samym wzór powyższy pokrywa się z drugą zasadą dynamiki Newtona.

Zaprezentowanemu wywodowi drugiej zasady dynamiki z zasady najmniejszego działania daleko jest do matematycznej ścisłości. Zauważmy jednak, że uwaga ta nie dotyczy wspomnianej możliwości, iż działanie staje się maksymalne, a nie minimalne. Żądaliśmy bowiem jedynie znikania pochodnej $\frac{\partial S}{\partial z_i}$, co obejmuje obydwa przypadki, jak również możliwość istnienia punktu stacjonarnego (co czasem też się zdarza).

Co z pozostałymi zasadami? – zapyta Czytelnik. Cóż, pierwszą z nich przemyciliśmy formułując zasadę najmniejszego działania – zasada wymaga podania wzoru na energię kinetyczną. Powiedzenie, że ten wzór to $\frac{1}{2}mv^2$, jest słuszne jedynie w układzie inercjalnym. Wtedy też dostajemy ruch jednostajny prostoliniowy. Jeżeli chodzi o trzecią zasadę dynamiki, to orzeka ona o siłach działających pomiędzy ciałami, wymaga więc wyjścia poza mechanikę punktu materialnego, czego w tym artykule nie robimy. Ale również trzecia zasada dynamiki znajduje w przedstawionym formalizmie swój wyraz.

Trzecia zasada dynamiki wiąże ze sobą siłę $\vec{F}_{AB}$, z jaką punkt B działa na punkt A, z siłą $\vec{F}_{BA}(=-\vec{F}_{AB})$, z jaką punkt A działa na B. Ograniczmy się do układu dwóch punktów materialnych. Działanie w tym przypadku nadal określamy jako średnią czasową różnicy energii kinetycznej i potencjalnej (całkowitych). Trzecią zasadę dynamiki odtworzymy zakładając, że energia potencjalna zależy nie od indywidualnych położeń, lecz jedynie od ich różnic.

Druga zasada dynamiki wiąże ze sobą przyczynę (siłę) i skutek (przyspieszenie) i na tej podstawie pozwala – przy znajomości położenia i prędkości w pewnej chwili – określić położenie i prędkość w chwili następnej. Ruch w tym opisie składa się z wielkiej liczby małych kroczków powiązanych związkiem przyczynowo-skutkowym. Inaczej jest w zasadzie najmniejszego działania. Tam, poruszająca się cząstka w jakiś sposób „wie" od samego początku, jak ma się poruszać w przeciągu całego trwania ruchu, „przeczuwa", że ruch nie zostanie przerwany aż do osiągnięcia swego celu. Nie może na początku biec zbyt wolno, bo w końcowej fazie wymagałoby to nadmiernych prędkości i – co za tym idzie – nieminimalnej wartości działania. Interpretację taką jest niezmiernie trudno pogodzić z przyczynowym (kauzalnym) opisem świata, który przecież legł u podstaw fizyki! Fakt ten sugeruje, że mechanika klasyczna nie jest teorią pełną (choć nie ma tu żadnej wewnętrznej sprzeczności o charakterze formalnym). I ta właśnie obserwacja może posłużyć do rozwinięcia pewnego sformułowania mechaniki kwantowej.

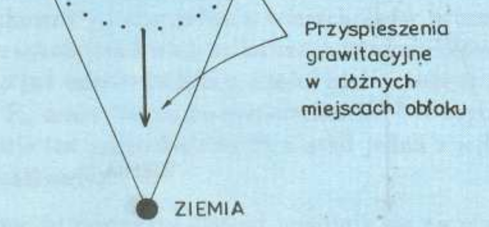
kołowych, w tym przypadku siła grawitacji $m\vec{g}$ jest równoważona przez siłę odśrodkową $mv^2/r = mg$, gdzie m jest masą obiektu krążącego po orbicie, v – jego prędkością, r – odległością od środka Ziemi. Siła odśrodkowa jest siłą bezwładności wywołaną przez przyspieszenie $\vec{g}$ odchylające tor ciała od linii prostej. Na orbicie eliptycznej ruch ciała jest złożeniem ruchu obiegowego oraz spadku swobodnego (lub swobodnego ruchu w górę – siła grawitacji zmniejsza wtedy prędkość), również wtedy siła grawitacyjna jest znoszona przez siły bezwładności, chociaż rachunek byłby trochę bardziej skomplikowany.

2. Siły pływowe.

Wyobraźmy sobie kulisty obłok złożony z małych obiektów, nie oddziałujących na siebie żadnymi siłami (zapomnimy na chwilę o ich wzajemnym przyciąganiu grawitacyjnym) i spadający swobodnie w polu grawitacyjnym bardzo dużego obiektu (np. Ziemi) wprost ku jego środkowi, z prędkością początkową równą zeru (rys. 1a). Przypomnijmy wzór na przyspieszenie grawitacyjne:

$$\vec{g} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}\,,$$

gdzie G – stała grawitacyjna, M – masa Ziemi, r – odległość obiektu od Ziemi. Ponieważ obiekty znajdujące się w „górnej" („tylnej"?) części obłoku są zawsze dalej od Ziemi niż obiekty w dolnej części obłoku, przyspieszenie tylnej części będzie zawsze mniejsze od przyspieszenia przedniej części. Ta różnica przyspieszeń wywoła różnicę w prędkościach, stale narastającą. W rezultacie dolna część obłoku będzie oddalała się od górnej. Równocześnie przyspieszenia bocznych



Rys. 1a.
Obłok swobodnie spadających obiektów, w chwili początkowej mający kształt kulisty...

Rys. 1b.
...wydłuży się podczas lotu i zwęży wskutek różnic w natężeniu pola grawitacyjnego w sąsiednich punktach.