Kwadratura koła, czyli jak zostać milionerem

Piotr HAJŁASZ

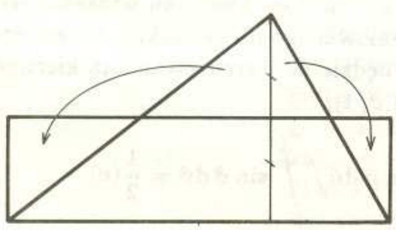
Ten dziwny tytuł wyjaśni się dopiero pod koniec artykułu. Ale nie uprzedzajmy faktów.

Powiemy o dwóch wielokątach, że są równoważne przez **pocięcie na wielokąty** (w skrócie: przez **pocięcie**), jeżeli jeden z nich tak można pociąć na skończoną liczbę mniejszych wielokątów, że z tych kawałków da się złożyć drugi wielokąt. Przy układaniu drugiego wielokąta kawałki nie mogą na siebie zachodzić, mogą co najwyżej stykać się brzegami. Kiedy jest to możliwe? Oczywiście, wielokąty muszą mieć to samo pole. Okazuje się, że jest to już warunek dostateczny! Ten fakt został udowodniony niezależnie przez Farkasa Bolyaia w 1832 r. i Paula Gerwiena w 1833 r.

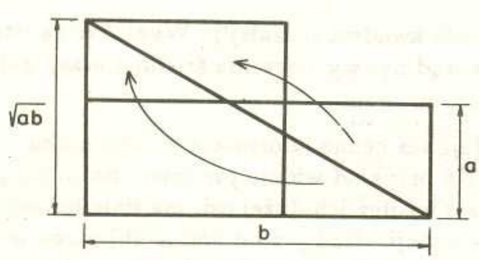
Twierdzenie (Bolyai-Gerwien). Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają to samo pole.

Dowód. Łatwo zauważyć, że jeżeli wielokąt W_1 jest równoważny przez pocięcie z wielokątem W_2, wielokąt W_2 zaś z wielokątem W_3, to W_1 jest równoważny z W_3 (dlaczego?). Wobec tego wystarczy udowodnić, że dowolny wielokąt jest równoważny z kwadratem o tym samym polu. Dowód tego faktu rozbijemy na kilka kroków.

Krok 1. Trójkąt jest równoważny przez pocięcie z prostokątem.

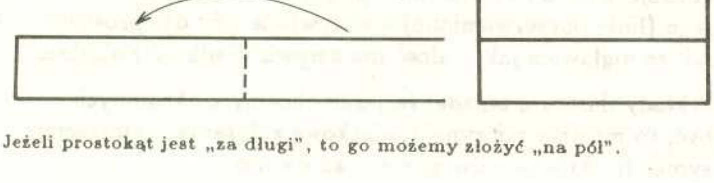


Krok 2. Jeżeli w prostokącie stosunek długości krawędzi dłuższej do krótszej jest nie większy niż 4, to prostokąt ten jest równoważny z kwadratem.



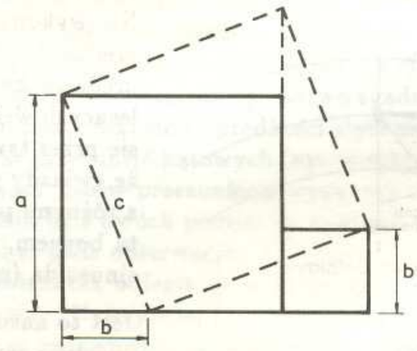
Dlaczego musi być $\frac{b}{a} \leq 4$?

Krok 3. Dowolny prostokąt jest równoważny z prostokątem takim, jak w kroku 2.



Jeżeli prostokąt jest „za długi", to go możemy złożyć „na pół".

Krok 4. Dwa kwadraty są równoważne przez pocięcie z jednym kwadratem.



Krok ten jest w zasadzie jednym z rysunkowych dowodów twierdzenia Pitagorasa.

Krok 5. Dowolny wielokąt kroimy na trójkąty. Z trójkątów robimy kwadraty (kroki 1, 2, 3), a kwadraty łącząc po kolei – tak jak w kroku 4 – dają nam w końcu jeden kwadrat – równoważny z naszym wielokątem.

Można postawić analogiczne pytanie dla wielościanów i badać, jakie wielościany są równoważne przez pocięcie na wielościaniki. Otóż **trzeci problem Hilberta** dotyczy właśnie tego typu problemu. Można go sformułować w sposób następujący. Czy czworościan foremny i sześcian o tej samej objętości są równoważne przez pocięcie na wielościaniki? Otóż w tym samym roku, w którym problem został sformułowany, a więc w roku 1900, Dehn udowodnił, że nie są równoważne.

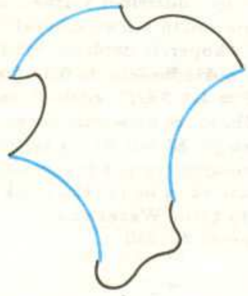
W 1900 r. na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym David Hilbert sformułował 23 problemy. Próby rozwiązania tych problemów przyczyniły się w znacznym stopniu do rozwoju matematyki współczesnej.

Ale powróćmy na płaszczyznę. Skoro poradziliśmy sobie z wielokątami, to zastanówmy się, czy koło i kwadrat są równoważne przez pocięcie na **wielokąty krzywoliniowe**? Oczywiście, musimy dopuścić szerszą klasę kawałków, na które tniemy – wielokąty krzywoliniowe, bo przecież z normalnych wielokątów koła nie da się poskładać. Co to jest wielokąt krzywoliniowy? Mówiąc niezbyt ściśle, jest to wielokąt, w którym krawędzie mogą być powyginane.

Podzieliliśmy koło na wielokąty krzywoliniowe.

Nieco ściślej, jest to kawałek płaszczyzny otoczony krzywą bez samoprzecięć – takie zdeformowane koło. Okazuje się tym razem, że kwadrat i koło nie są równoważne przez pocięcie. Prawdę powiedziawszy, ten fakt nie jest zbyt zaskakujący. Przecież każdy odpowie bez namysłu, że nie ma takiego „puzzla", który w zależności od tego, jak go składać, da albo kwadrat, albo koło. Zresztą, zaraz to udowodnimy. Dowód nasz nie będzie zbyt ścisły, bo przecież nie zdefiniowaliśmy precyzyjnie, co to jest wielokąt krzywoliniowy.

Przypuśćmy, że pocięliśmy koło o promieniu 1 na wielokąty krzywoliniowe. Porozkładajmy je oddzielnie. Pokolorujmy te kawałki obwodów tych wielokątów, które są łukami o promieniu 1.



Pokolorowaliśmy fragmenty obwodu będące łukami okręgów o promieniu 1.

Mamy dwa rodzaje takich łuków – wklęsłe i wypukłe. Jeżeli jakiś wielokąt ma wklęsły łuk pokolorowany, to temu łukowi odpowiadają pewne pokolorowane łuki wypukłe tej samej długości (ponieważ do tego łuku doklejony jest z drugiej strony inny wielokąt bądź wielokąty – zanim je porozkładaliśmy oddzielnie). Natomiast nie do wszystkich wypukłych łuków pokolorowanych doklejone są z drugiej strony łuki wklęsłe, bowiem cały obwód koła jest pokolorowany.

Tak więc suma długości pokolorowanych łuków wklęsłych jest mniejsza o 2π (długość okręgu) od sumy długości pokolorowanych łuków wypukłych. Natomiast jeżeli kwadrat potniemy na krzywoliniowe wielokąty, to powtarzając powyższe rozumowanie stwierdzimy, że sumy długości pokolorowanych łuków wklęsłych i wypukłych są równe. A stąd już wynika, że nie da się z tych samych kawałków złożyć koła i kwadratu.

Można też nieco inaczej zdefiniować równoważność dwóch figur (brył).

Powiemy, że dwie figury (bryły) A i B są równoważne przez **skończony rozkład**, jeżeli można je przedstawić w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j,$$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j,$$

w taki sposób, że zbiory A_i oraz B_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są izometryczne.

Równoważność przez skończony rozkład przypomina równoważność przez pocięcie, ale jednak różni się od niej bardzo istotnie. Po pierwsze, przy równoważności przez pocięcie dopuszczaliśmy jedynie cięcie na wielokąty (ewentualnie wielokąty krzywoliniowe, wielościany). Tutaj natomiast dopuszczamy rozkład na dowolne podzbiory. Po drugie, przy równoważności przez skończony rozkład zakładamy, że zbiory, na które dzielimy, są rozłączne, natomiast przy równoważności przez pocięcie wielokąty nie były rozłączne, gdyż stykały się brzegami. O tym, jak bardzo różnią się pojęcia równoważności przez pocięcie i przez skończony rozkład, przekonamy się widząc, do jak dalece odmiennych wniosków one prowadzą.

W 1925 r. Alfred Tarski postawił następujące pytanie: Czy koło i kwadrat o tym samym polu są równoważne przez skończony rozkład? Jest to więc w pewnym sensie pytanie o kwadraturę koła, tylko że rozumianą zupełnie inaczej niż w starożytnej Grecji. I oto w 1990 r. węgierski matematyk, Miklós Laczkovich udowodnił, że tak rozumiana kwadratura koła jest wykonalna! Liczba części, na które dzielił koło i kwadrat, wynosiła około ... 10^{50}.

Jeszcze chyba bardziej zaskakującym wynikiem od twierdzenia Laczkovicha jest **paradoks Banacha-Tarskiego**. Otóż udowodnili oni w 1924 r. (ponad 60 lat przed Laczkovichem!), że kula o promieniu 1 jest równoważna przez skończony rozkład z dwiema kulami o promieniu 1! (A oto recepta, jak zostać milionerem: dokonujemy wielokrotnie takich operacji na kulach ze złota.)

Tak naprawdę, to Banach i Tarski udowodnili znacznie więcej. Udowodnili oni mianowicie, że dwa dowolne ograniczone, o niepustym wnętrzu, podzbiory w $\mathbf{R}^3$ są równoważne przez skończony rozkład. (W szczególności czworościan foremny i kostka – por. trzeci problem Hilberta.)

Stefan Banach (1892 – 1945). Przez wielu uznawany za najwybitniejszego polskiego matematyka. Jeden z twórców analizy funkcjonalnej.

Alfred Tarski (1901 – 1983). Wybitny polski matematyk i logik, autor kluczowego dla podstaw matematyki pojęcia spełniania.

Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że twierdzenie to jest w ewidentny sposób fałszywe. Przecież jeżeli dzielimy kulę na skończenie wiele kawałków i z tych kawałków składamy coś innego, to to coś musi mieć taką samą objętość co wyjściowa kula, przecież przy izometriach objętości się zachowują. Otóż w tym rozumowaniu jest błąd. Byłoby ono poprawne, gdybyśmy potrafili obliczyć objętość tych kawałków, ale przecież jest wiele zbiorów, dla których bynajmniej nie jest jasne jaka miała by być ich objętość, powierzchnia, długość. Na przykład: jaka jest długość zbioru liczb niewymiernych z odcinka $[0,1]$?

Wobec powyższych argumentów jasne jest, że w paradoksie Banacha-Tarskiego kulę musimy dzielić na kawałki, dla których w żaden sposób nie można obliczyć objętości (przynajmniej dla niektórych z nich). A jak to jest na płaszczyźnie? W twierdzeniu Laczkovicha koło i kwadrat mają tę samą powierzchnię. Czy jednak można rozłożyć koło na skończoną liczbę kawałków i z tych kawałków otrzymać figurę o innym polu?

Otóż w 1923 r. Stefan Banach udowodnił, że na prostej i na płaszczyźnie istnieje metoda pozwalająca na obliczenie długości i powierzchni **wszystkich** podzbiorów. Wobec tego równość powierzchni jest warunkiem koniecznym na to, aby dwie figury na płaszczyźnie były równoważne przez skończony rozkład.

Dla tych, którzy wiedzą coś niecoś o teorii miary, sformułujemy precyzyjnie twierdzenie Banacha. Otóż Banach udowodnił, że na prostej i na płaszczyźnie istnieje **skończenie** addytywna miara mierząca **wszystkie** podzbiory, niezmiennicza ze względu na izometrie i rozszerzająca miarę Lebesgue'a.

Paradoks Banacha-Tarskiego pokazuje, że w $\mathbf{R}^3$ takiej miary nie ma. Z tego paradoksu wynika też, że takiej miary nie ma w $\mathbf{R}^n$ dla $n \geq 3$ (Jak?).

A czy w przestrzeni istnieje taka uniwersalna metoda obliczania objętości wszystkich zbiorów? Oczywiście, nie istnieje. Gdyby bowiem istniała, to nie byłoby paradoksu Banacha-Tarskiego.