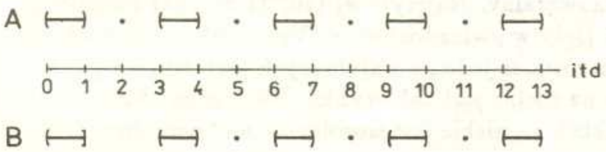
O parach niehomeomorficznych (II)

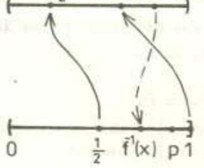
Przypomnijmy; pokazaliśmy (*EPSILON* nr 8), że gdy określimy zbiory: $A = (0,1) \cup \{2\} \cup (3,4) \cup \{5\} \cup \ldots$ i $B = (A \setminus \{2\}) \cup \{1\}$, to istnieje bijekcja ciągła przekształcająca A na B oraz bijekcja ciągła przekształcająca B na A. Zbiory A i B nie są jednak homeomorficzne. Dlaczego?



Dowód, który przedstawimy poniżej, nie jest najprostszym z możliwych, ma jednak tę zaletę, że opiera się wyłącznie na znanej ze szkoły własności przyjmowania wartości pośrednich (nazywanej też własnością Darboux) w jej bezpośredniej postaci. Zgodnie z tą własnością funkcja ciągła $\Phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ przyjmuje wszystkie wartości między $\Phi(a)$ i $\Phi(b)$.

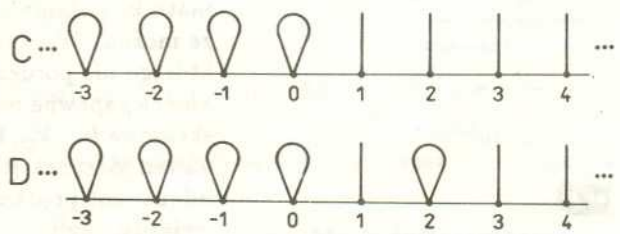
Przypuśćmy, że istnieje homeomorfizm przekształcający B na A; oznaczmy go przez f. Wartość f w jedynce nie może być punktem izolowanym (tzn. $f(1) \neq 3k+2$ dla dowolnego k naturalnego). Czemu? Gdyby tak było, to na mocy własności przyjmowania wartości pośrednich w zbiorze A musiałby zawierać się przedział $\left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right]$ (lub $\left[f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$), gdziekolwiek jednak $f\left(\frac{1}{2}\right)$ by się znajdowało ($f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f(1)$, bo f jest bijekcją), jest to niemożliwe.

Wobec tego zachodzi $f(1) \in (k, k+1)$ dla pewnego k całkowitego (k jest takie, że przedział $(k, k+1)$ zawiera się w A). Zauważmy, że również $f\left(\frac{1}{2}\right)$ należy do $(k, k+1)$, gdyż wszystkie spośród liczb między $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i $f(1)$ muszą być wartościami funkcji f. Przyjmijmy, że $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$ (gdy $f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$, dowód jest analogiczny). Weźmy $x \in (f(1), k+1)$ i rozważmy punkt $f^{-1}(x)$. Należy on do $(0,1]$ (w przeciwnym przypadku mamy sprzeczność z własnością Darboux zastosowaną dla przedziału $[f(1), x]$ i funkcji f^{-1}, która też jest ciągła). Ponadto $f^{-1}(x) \neq 1$.



Weźmy teraz dowolny element $p \in (f^{-1}(x), 1) \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Korzystając znów z własności przyjmowania wartości pośrednich, znajdziemy: w przedziale $(f(1), x)$ taki punkt q, że $f^{-1}(q) = p$ i punkt o tej samej własności w przedziale $\left(f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right)$. Przedziały $\left(f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right)$ i $(f(1), x)$ są jednak rozłączne, więc f^{-1} nie może być bijekcją. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Poświęćmy jeszcze parę słów drugiemu ze wspomnianych poprzednio przykładów „niehomeomorficznej pary". Tym razem są to podzbiory płaszczyzny. Oto one (górne końce „pionowych odcinków" nie należą do zbiorów C i D):



Przedstawimy tu jedynie ideę odpowiedniego rozumowania. By otrzymać w sposób ciągły zbiór D ze zbioru C, należy odcinek wychodzący z punktu 2 zawinąć i zaczepić w tym punkcie także i drugim końcem, tak, by otrzymać pętelkę. Aby dostać C z D, należy to zrobić z odcinkiem zaczepionym w punkcie 1 i przesunąć całą figurę o 2 w lewo.

Tak jak poprzednio, fakt, że zbiory C i D nie są homeomorficzne, wydaje się „widocznym". Dowód nie jest jednak całkiem banalny. Myśl jednego ze sposobów pokazania tego polega na zauważeniu, że punkty, w których zaczepione są pętelki, muszą po przekształceniu przez homeomorfizm przejść w punkty tego samego typu. Należy też wykorzystać własność, że jeśli po wyrzuceniu jednego punktu figura rozpadnie się na kilka kawałków, to taki sam efekt da wyrzucenie obrazu tego punktu z homeomorficznego obrazu figury, a ponadto uzyskane kawałki muszą być ze sobą parami homeomorficzne. Na tej podstawie można wykazać, że żaden punkt nie może być obrazem 2 w ewentualnym homeomorfizmie z D na C.

Coś z życia

Komputer to taki niesłychanie sprawny idiota.

(Hugo Steinhaus)

W związku z planowanym wyjazdem zagranicznym matematyk R. został zmuszony do napisania swego życiorysu w języku angielskim. Pałając wrodzoną niechęcią do tego typu twórczości, zapytał swojego kolegę, matematyka N., czy ten przypadkowo nie posiada na dyskietce tekstu z własnym życiorysem. Przypuszczenie było słuszne – posiadał. Pożyczył więc R. dyskietkę, siadł przy komputerze i zaczął modyfikować życiorys kolegi zmieniając datę urodzenia i inne dane osobiste. Resztę pozostawiał bez zmian.

Gdy dotarł do działalności naukowej w życiorysie, z niejakim zaskoczeniem przeczytał, że działem, którym interesuje się N., jest „erotic theory".

Skąd taka informacja znalazła się w tekście? Rozwiązanie zagadki nie było trudne. Otóż po napisaniu życiorysu N. sprawdzał poprawność angielszczyzny specjalnym programem komputerowym („spellchecker"), a słowa „ergodic" (N. zajmuje się teorią ergodyczną) w słowniku nie było. Komputer wyświetlił więc możliwe, znane sobie, warianty „poprawnych" słów, wśród których najbliższe wyjściowemu było właśnie „erotic". Matematyk N. zaś z rozpędu nacisnął nieodpowiedni klawisz.

Co najciekawsze, pan N. sam usterki nie zauważył i ów życiorys wysłał za granicę. Odpowiedzi na razie nie ma. Niewykluczone, że wkrótce zostanie on zaproszony do wygłoszenia cyklu wykładów. Pytanie tylko, czy to, co powie, zadowoli słuchaczy...

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.