Manowce analogii

Józef BANAŚ

Bardzo często obiektem badań matematycznych są różnego typu przestrzenie, np. przestrzeń liniowa, przestrzeń metryczna, przestrzeń Banacha, przestrzeń Riemanna itp. Jeśli chcemy w ramach naszych badań „zajrzeć" głębiej w strukturę jakiejś przestrzeni, musimy poznać wiele jej różnorodnych własności i obowiązujących w niej reguł. Mówiąc obrazowo, musimy nauczyć się żyć w tej przestrzeni. Musimy zarazem pamiętać o tym, że zmieniając obiekt naszych badań, czyli „przenosząc się" do innej przestrzeni, powinniśmy pozbyć się „starych przyzwyczajeń", gdyż w nowej przestrzeni obowiązują już inne warunki, rządzą nią nowe reguły i prawa.

Dla zilustrowania powyższej wypowiedzi zajmiemy się pewnym problemem geometrycznym.

Załóżmy, że $\mathbf{E}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Będziemy, jak to już tradycyjnie jest przyjęte, oznaczać wektory z $\mathbf{E}$ literami łacińskimi, skalary zaś z $\mathbf{R}$ literami greckimi. Przypomnijmy, że odcinkiem o końcach $x, y \in \mathbf{E}$ nazywamy zbiór $\overline{xy}$ taki, że $\overline{xy} = \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1]\}$, a środkiem odcinka $\overline{xy}$ – punkt $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ z tego odcinka. Zbiór X ($X \subset \mathbf{E}$) nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera łączący go odcinek.

W dalszym ciągu załóżmy, że w przestrzeni $\mathbf{E}$ określona jest norma $||\cdot||$, tzn. $\mathbf{E}$ jest przestrzenią unormowaną. Oczywiście, norma ta indukuje metrykę na $\mathbf{E}$, określoną w ten sposób, że za odległość punktów $x, y \in \mathbf{E}$ przyjmujemy $||x-y||$.

Gdy ktoś nie lubi normy (np. dlatego, że nie zna tego pojęcia), może wyobrazić sobie normę punktu $x \in \mathbf{E}$ jako odległość punktu x od punktu $(0, \ldots, 0)$. Podobnie słowo metryka może być zastąpione przez odległość pod warunkiem, że będzie się pamiętało, iż odległość można mierzyć na różne sposoby.

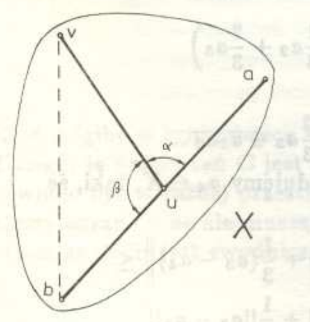
Jeżeli X jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbf{E}$, to średnicą zbioru X nazywać będziemy kres górny zbioru odległości jego punktów $(\sup\{||x-y|| : x, y \in X\})$ i oznaczać symbolem $\operatorname{diam} X$.

Załóżmy następnie, że X jest wypukłym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni unormowanej $\mathbf{E}$, takim że $\operatorname{diam} X > 0$. Punkt $x \in X$ nazywać się będzie punktem diametralnym zbioru X, jeżeli $\sup\{||x-y|| : y \in X\} = \operatorname{diam} X$. Jeżeli natomiast dla punktu x mamy $\sup\{||x-y|| : y \in X\} < \operatorname{diam} X$, to x nazywa się punktem niediametralnym zbioru X.

Postawmy teraz następujące pytanie: Czy w każdym wypukłym i ograniczonym podzbiorze X przestrzeni $\mathbf{E}$, takim, że $\operatorname{diam} X > 0$, znajdują się punkty niediametralne tego zbioru?

Intuicja związana z naszymi doświadczeniami geometrycznymi sugeruje, że tak być powinno. Inaczej bowiem zbiór X byłby „dziurawy", co kłóci się z założeniem o jego wypukłości.

Na zwykłej płaszczyźnie przykładem figury złożonej z samych punktów diametralnych jest zbiór wierzchołków jakiegoś wielokąta foremnego (np. kwadratu); oczywiście, nie jest to zbiór wypukły. Podobnie okrąg.



Rys. 1

Spróbujmy to jednak udowodnić. Oczywiście, naszych doświadczeń geometrycznych nabywamy w przestrzeni $\mathbf{R}^2$ z normą euklidesową, $||x|| = ||(x_1, x_2)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (inaczej: na płaszczyźnie z euklidesowym sposobem mierzenia odległości punktów). Niech $X \subset \mathbf{R}^2$ będzie zbiorem ograniczonym, wypukłym i niech $\operatorname{diam} X = d > 0$. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon \in (0; d/10)$ i znajdźmy w X dwa punkty a, b, takie, żeby $||a-b|| \geq d - \varepsilon$ (jest to możliwe wobec definicji d). Niech u oznacza środek odcinka $\overline{ab}$ (por. rys. 1).

Rozmowa o średnich,

czyli ponowne odkrywanie MatAmeryki

Andrzej OLEJNICZAK, Krzysztof OMILJANOWSKI

Ten tekst jest próbą wiwisekcji, próbą ukazania, jak się robi matematykę, próbą pokazania, jak się myśli (a raczej, jak autorzy to robili – wszak to bardzo indywidualna sprawa). Najmniej istotna jest tu treść matematyczna, znana i raczej błaha. Nie o nią tu chodzi (w tytule akcent jest położony na słowo „rozmowa", a nie na „o średnich").
Tekst ten ma (w zamiarze) propagować nie wiedzę matematyczną, lecz formę jej zdobywania.
Ponadto:
– nieścisłości są jak najbardziej zamierzone (w przeciwieństwie do błędów);
– pojawiające się słowo ćwiczenie jest sugestią pracy własnej dla tych Czytelników, którzy chcą ten tekst traktować (mimo wszystko) jako matematyczny;
– w zbliżonej formie materiał ten był prezentowany (przez drugiego z autorów) jako odczyt dla młodzieży organizowany przez Oddział Wrocławski PTM.

Poniższa rozmowa autorów – układających zadania dla studentów – zaczęła się od następującego zadania:

Zadanie 1. Dla liczb p, q $(0 < p < q)$ definiujemy ciągi $\{a_n\}, \{b_n\}$ następująco: $a_1 = p$, $b_1 = q$, a_{n+1} jest średnią harmoniczną a_n, b_n, czyli $a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$, b_{n+1} jest średnią arytmetyczną a_n, b_n, czyli $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Wykazać, że ciągi te są zbieżne do średniej geometrycznej liczb p, q, czyli do $\sqrt{pq}$.

– To zadanie jest trochę za trudne na egzamin. A może takie?

Zadanie 2. Dla liczb p, q $(p < q)$ definiujemy ciąg $\{a_n\}$ następująco: $a_1 = p$, $a_2 = q$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$. Zbadać zbieżność tego ciągu.

– Tak, ale to zadanie było na zajęciach. (Okazuje się, że dla $p = 0$, oraz $q = 1$ zapisanie pierwszych kilku wyrazów w układzie dwójkowym daje wyraźną wskazówkę ćwiczenie.) Trzeba wymyślić coś prostszego!

– Mam:

Zadanie 3. Dla liczb p, q $(0 < p < q)$ definiujemy ciąg $\{a_n\}$ następująco:
$a_1 = p,\ a_2 = q,$

$$(*)a \qquad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu.

– Ciekawe zadanie; jak się do tego zabrać?
– Wypiszmy pierwszych kilka wyrazów. Oj, nie mamy nic do pisania!
– W takim razie spróbujmy to sobie wyobrazić geometrycznie: mamy dwa wektory $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ (o wspólnym początku). Wtedy $\vec{a_3}$ wskazuje na środek (ciężkości) odcinka łączącego końce wektorów $\vec{a_1}, \vec{a_2}$. Zatem $\vec{a_4}$ wskazuje na środek ciężkości trzech jednakowych (punktowych) mas umieszczonych w końcach $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ ćwiczenie; czyli $\vec{a_4} = \vec{a_3}$. Jasne, że dalej będzie tak samo; czyli $\vec{a_3} = \vec{a_4} = \vec{a_5} \ldots$ *Niespodziewane, prawda?*
– A co będzie z *Zadaniem* 3, gdy w $(*)a$ w miejsce średniej arytmetycznej wstawimy średnią geometryczną:

$$(*)g \qquad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

– Rachować? To nudne. Spróbujmy pokombinować:

$$a_{n+1} = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n},$$

$$\log a_{n+1} = \frac{1}{n} \log (a_1 a_2 \ldots a_n),$$

$$\log a_{n+1} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n}{n}.$$

– Zatem logarytmy wyrazów tego ciągu tworzą ciąg taki, jak w pierwszej wersji *Zadania* 3. Czyli i tym razem $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots$
– Zapewne też tak jest dla średniej harmonicznej.
– Zaraz, zaraz. Średnia harmoniczna dwóch liczb występowała w *Zadaniu* 1, ale by mieć analogię do *Zadania* 3, trzeba obliczać średnią harmoniczną trzech (i więcej) liczb. Nie pamiętam, jak się ją określa!
– Ja też. Kojarzy mi się to z jakimś prawem z elektryczności (opór zastępczy?), gdzie jest mowa o odwrotnościach. Zobaczmy:

$$a_3 = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{\dfrac{a_1 + a_2}{a_1a_2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_1}} = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}{2}}.$$

Przypuśćmy, że u jest diametralny. Wtedy istniałby punkt $v \in X$, taki, że $\|v - u\| \ge d - \varepsilon$. Oczywiście, jeden z kątów α i β, zaznaczonych na rysunku 1, musi być nie mniejszy niż $\pi/2$ i niech to będzie np. β. Korzystając z twierdzenia cosinusów mamy:

$$\|v-b\|^2 = \|v-u\|^2 + \|u-b\|^2 - 2\|v-u\| \cdot \|u-b\| \cos\beta \ge$$
$$\ge \|v-u\|^2 + \|u-b\|^2.$$

(bo $\cos\beta \le 0$)

Stąd

$$\|v-b\|^2 \ge (d-\varepsilon)^2 + \left(\frac{d-\varepsilon}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(d-\varepsilon)^2 > \frac{5}{4}\left(d - \frac{d}{10}\right)^2 > d^2,$$

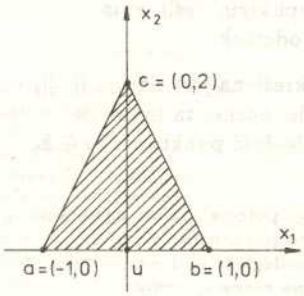
a więc

$$\|v-b\| > d.$$

Jest to jednak sprzeczne z tym, że diam $X = d$. Zatem u jest punktem niediametralnym dla zbioru X.

Poprzez analogię można by oczekiwać, że tak będzie również wtedy, gdy przestrzeń $\mathbf{R}^2$ wyposażymy w inną normę (inny sposób mierzenia odległości). I rzeczywiście, analogia ta jest poprawna, ale nie do końca, ponieważ dowód wyżej przeprowadzony nie zawsze daje oczekiwany efekt. Weźmy bowiem w $\mathbf{R}^2$ normę maksimum:

$$\|(x_1, x_2)\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$



Rys. 2

Rozważmy w $\mathbf{R}^2$ zbiór T – trójkąt o wierzchołkach $(1;0), (-1;0)$ i $(0;2)$ (rys. 2). Oczywiście, diam $T = 2$ oraz $\|a-b\|_m = 2$. Ale punkt u, będący środkiem odcinka $\overline{ab}$, nie jest już teraz tak „dobry" jak poprzednio, ponieważ $\|u-c\|_m = 2$.

Niemniej jednak zbiory ograniczone i wypukłe w $\mathbf{R}^2$ z metryką maksimum mają punkty niediametralne. A oto dowód.

Przypuśćmy, że wszystkie punkty zbioru X są diametralne. Niech $a_1, a_2 \in X$ będą takie, że $\|a_1 - a_2\| \ge d - \varepsilon$ (będziemy dalej opuszczać m przy symbolu normy), gdzie $\varepsilon > 0$ jest odpowiednio małe. Ponieważ środek u_1 odcinka $\overline{a_1a_2}$ jest diametralny, więc znajdziemy punkt $a_3 \in X$, taki, że $\|a_3 - u_1\| \ge d - \varepsilon/2$. Stąd mamy, że

$$d - \varepsilon/2 \le \left\| a_3 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \right\| \le \frac{1}{2}\|a_3 - a_1\| + \frac{1}{2}\|a_3 - a_2\|.$$

Zatem

$$2d - \varepsilon \le \|a_3 - a_1\| + \|a_3 - a_2\|.$$

Stąd, ponieważ $\|a_3 - a_2\| \le d$, więc $\|a_3 - a_1\| \ge d - \varepsilon$. Podobnie $\|a_3 - a_2\| \ge d - \varepsilon$.

W poprzednim dowodzie podaliśmy, co znaczyło w nim „odpowiednio małe" – było to „mniejsze od $d/10$". Tutaj pozostawiamy Czytelnikowi określenie, dla jak małego ε dowód będzie przebiegał pomyślnie.

Weźmy teraz punkt $u_2 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$. Zauważmy, że $u_2 \in X$, bowiem wystarczy zapisać

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3\right)$$

i zauważyć, że

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \in \overline{a_1a_2}, \quad \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \in \overline{a_2a_3}.$$

Ponieważ punkt u_2 jest diametralny, więc znajdujemy $a_4 \in X$, taki, że $\|u_2 - a_4\| \ge d - \varepsilon/3$. Dalej mamy:

$$d - \varepsilon/3 \le \left\| \frac{1}{3}(a_1 - a_4) + \frac{1}{3}(a_2 - a_4) + \frac{1}{3}(a_3 - a_4) \right\| \le$$
$$\le \frac{1}{3}\|a_1 - a_4\| + \frac{1}{3}\|a_2 - a_4\| + \frac{1}{3}\|a_3 - a_4\|.$$

Stąd, podobnie jak poprzednio, wnioskujemy, że

$$||a_4 - a_i|| \geq d - \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

Załóżmy dalej, że przedłużamy naszą procedurę indukcyjnie. Wtedy skonstruujemy taki ciąg $\{a_n\}$ punktów z X, że

$$||a_i - a_j|| \geq d - \varepsilon \qquad \text{dla } i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots$$

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ składa się z punktów zbioru X, więc jest ograniczony, a zatem musi zawierać podciąg mający w $\mathbf{R}^2$ granicę. Z drugiej strony odległość między jego elementami jest co najmniej $d - \varepsilon$, a to wyklucza zbieżność tak całego ciągu, jak i każdego z jego podciągów. Stąd sprzeczność. Oznacza to, że w zbiorze X są punkty niediametralne.

Zwróćmy uwagę na to, że w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z faktu, że X jest podzbiorem $\mathbf{R}^2$, jak również z tego, że $|| \cdot ||$ była normą maksimum. Istotne było tylko to, że ciąg ograniczony w rozpatrywanej przestrzeni miał podciąg zbieżny. Własność tę nazywa się lokalną zwartością.

Czytelnik, znający nieco więcej analizy, zauważy zapewne, że przeprowadzone rozumowanie implikuje prawdziwość następujących dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 1. Każdy relatywnie zwarty i wypukły podzbiór dowolnej przestrzeni unormowanej ma punkty niediametralne.

Twierdzenie 2. Każdy zbiór wypukły i ograniczony w przestrzeni skończenie wymiarowej ma punkty niediametralne.

Teraz, poprzez analogię, można by wyciągnąć wniosek, że zbiór wypukły i ograniczony w dowolnej przestrzeni unormowanej powinien mieć punkty niediametralne. Oczywiście, nie można udowodnić tego tak, jak wyżej, gdzie skorzystaliśmy z lokalnej zwartości przestrzeni skończenie wymiarowych. Należy więc wymyśleć inny dowód. Okazuje się jednak, że analogia i intuicja zawodzą nas całkowicie. Rozpatrzmy bowiem przestrzeń $\mathbf{C} = C[0,1]$ złożoną z funkcji $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, ciągłych na przedziale $[0,1]$. Unormujmy tę przestrzeń w klasyczny sposób za pomocą normy maksimum $||x|| = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$. W przestrzeni tej rozważmy zbiór

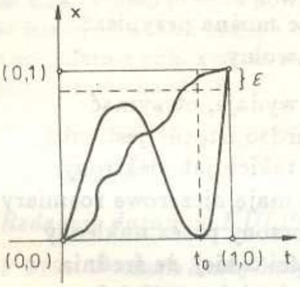
$$X = \{x \in \mathbf{C} : \ 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}.$$

Jest to więc zbiór złożony z funkcji, których wykresy na płaszczyźnie (t, x) łączą punkt $(0,0)$ z punktem $(1,1)$ i mieszczą się w kwadracie $[0,1] \times [0,1]$ (por. rys. 3). Oczywiście, zbiór X jest ograniczony, wypukły i diam $X = 1$. Pokażemy teraz, że mimo wypukłości zbiór ten jest bardzo dziurawy, ponieważ każdy jego punkt jest diametralny. Istotnie, weźmy dowolne $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. Wobec ciągłości funkcji x istnieje t_0 „bliskie" 1, takie, że $x(t_0) > 1 - \varepsilon$. Weźmy dalej dowolną funkcję $y \in X$, taką, że $y(t_0) = 0$. Mamy:

$$||x - y|| \geq |x(t_0) - y(t_0)| = x(t_0) > 1 - \varepsilon .$$

Zatem x jest diametralny.

Koniec dowodu.



Rys.

Ktoś mógłby w tym miejscu stwierdzić, że nasza „sztuczka" udała się dlatego, że przestrzeń $\mathbf{C}$ jest nieskończenie wymiarowa. Analogicznie powinno być w każdej przestrzeni tego typu (w takich przestrzeniach zbiory ograniczone nie muszą być zwarte). Niestety, okazuje się, że i tym razem analogia jest zwodnicza. Ale o tym, być może, innym razem.

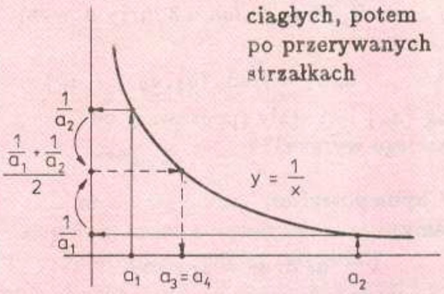
– Teraz jest jasne: średnia harmoniczna jest odwrotnością średniej arytmetycznej odwrotności danych liczb. Zatem w nowej wersji *Zadanie* 3 przyjmie postać:

$$(*)h \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}{n}} .$$

– No dobrze, ale jak dowieść, że i tym razem otrzymamy ciąg stały począwszy od trzeciego miejsca?

– Narysujmy kawałek hiperboli:

poruszamy się najpierw po ciągłych, potem po przerywanych strzałkach



– Przy obliczaniu a_4 ciągła strzałka nakryje przerywaną, a na pionowej osi nic się nie zmieni (pierwsza wersja *Zadania* 3). Popatrz uważnie! Mamy $a_4 = a_3$. Dalej też jest dobrze: $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots$. *Niespodziewane.*

– To pewnie da się dowieść, że tak jest dla **każdej** średniej!

– Ale **co to jest średnia?** Jak uogólnić, jak wyabstrahować wspólną cechę (tych trzech średnich)?

– Średnia to funkcja (o paskudnej dziedzinie), która n-tkom liczb przypisuje pewne liczby.

– No tak, ale według jakiego sposobu?

– Tak, by *Zadanie* 3 miało – w ogólnej wersji – rozwiązanie uogólniające rozwiązania dla tych konkretnych trzech średnich.

– Ale co to znaczy? To jest *wishful thinking*!

– Może i tak. Spróbujmy choć to zapisać:

$$\text{śred}[a_1, a_2, \ldots, a_n, \text{śred}(a_1, a_2, \ldots, a_n)] = \\ = \text{śred}(a_1, a_2, \ldots, a_n) .$$

– Tak, to by wystarczyło dla *Zadania* 3 ćwiczenie. Niestety, trudno to uznać za aksjomat – jest niezbyt naturalne (wszak niespodziewane dla nas było rozwiązanie pierwszej wersji *Zadania* 3).

– Może tak: gdy $\square$ jest pewnym działaniem (np. dodawaniem, mnożeniem), to s jest średnią (kwadracikową) liczb a_1, a_2, jeśli $s \square s = a_1 \square a_2$.

– A dla większej ilości liczb? Aha:

Definicja 1

$s = \text{śred}_\square (a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{s \square s \square \ldots \square s}_{n \text{ razy}} = a_1 \square a_2 \square \ldots \square a_n .$

– Dobrze, ale żeby móc pisać (po prawej stronie) bez nawiasów, to musisz mieć łączność działania $\square$.

– No to mam! $\square$ ma wszystkie własności, jakie są potrzebne dla poprawności tej definicji ćwiczenie! Niech się algebraicy martwią, jakie! O wiele ważniejsze jest, czy przy takiej ogólnej definicji średniej da się dowieść, że w *Zadaniu* 3, przy nowym warunku

$(*) \square \qquad a_{n+1} = \text{śred}_\square (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

ciąg $\{a_n\}$ jest stały (począwszy od trzeciego wyrazu)?

– Chyba potrafię:
mamy

$$a_3 \square a_3 = a_1 \square a_2$$

oraz

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = a_1 \square a_2 \square a_3 ,$$

co daje

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = (a_1 \square a_2) \square a_3,$$
$$a_4 \square a_4 \square a_4 = a_3 \square a_3 \square a_3,$$

czyli gdy $\square$ będzie miało porządne własności (tu przydałoby się coś na kształt pierwiastkowania ćwiczenie), to $a_4 = a_3$; a dalej zapewne indukcją:
$a_4 = a_5 = a_6 = \ldots$

– Oczywiście! Mamy wszystko! Chodźmy spać!
– Zaraz, zaraz, chwileczkę! Czy średnia harmoniczna jest średnią w sensie *Definicji* 1?
– Faktycznie; jest kłopot ze zdefiniowaniem takiego działania $\square_h$, by

$$\text{śred}_{\square_h} (p, q) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2}} .$$

– Mam, ale niezbyt elegancko:

$$p \square_h q = \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} .$$

– Lepiej wygląda, gdy się to wysłowi: $p \square_h q$ jest odwrotnością sumy odwrotności liczb p, q. To teraz mamy już wszystko.
– Fajnie, ale zobaczmy jeszcze konkretne przykłady innych średnich.
– Oj, ciężka sprawa; nie mam pomysłu na jakieś naturalne działanie typu $\square$.
– A może zróbmy analogicznie, jak dla średniej harmonicznej. Średnią harmoniczną odczytywaliśmy rysując hiperbolę; teraz narysujmy parabolę

Plazma kwarkowo-gluonowa

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Układ wielu zjonizowanych atomów, a więc dodatnio naładowanych jonów i elektronów obdarzonych ładunkami ujemnymi, nazywa się *plazmą*, dokładniej *plazmą elektronowo-jonową*. Plazma wykazuje cały szereg niebywale ciekawych i bardzo specyficznych własności i stąd bywa nazywana czwartym stanem materii, po ciałach stałych, cieczach i gazach. Kilka lat temu pojawił się w literaturze naukowej nowy termin – *plazma kwarkowo-gluonowa*, której właśnie jest poświęcony ten krótki artykuł.

Kwarki i gluony to składniki cząstek elementarnych podlegających *silnym oddziaływaniom jądrowym*. Wspomniane cząstki to *hadrony*, do których w szczególności należą protony i neutrony, zwane wspólnie *nukleonami*, tworzące jądra atomowe. Nukleon zbudowany jest z trzech kwarków powiązanych, sklejonych za pomocą gluonów (ang. *glue* – klej). Poza cząstkami trójkwarkowymi istnieją jeszcze wśród hadronów cząstki nazywane *mezonami*, każda tworzona przez parę kwark-antykwark. Kwarki i gluony obdarzone są ładunkami kolorowymi, czymś w rodzaju ładunków elektrycznych, i zdają się mieć tę szczególną cechę, że istnieją jedynie w układach kolorowo neutralnych, takich jak wspomniane nukleony i mezony. Wymieniona cecha stanowi treść *hipotezy uwięzienia*, o której nieco szerzej pisałem w *Delcie* 9/1991. Hipoteza uwięzienia nie wyklucza istnienia układu bardzo wielu kwarków i gluonów uwolnionych z wnętrz hadronów i tworzących makroskopowy układ, który jako całość jest kolorowo neutralny. Taki właśnie układ nazywany jest *plazmą kwarkowo-gluonową*.

Plazmę elektronowo-jonową można otrzymać z gazu atomowego dwoma sposobami – podgrzewając ów gaz lub podwyższając jego gęstość. Jak wiadomo, podgrzewanie gazu prowadzi do wzrostu prędkości atomów w gazie. Jeśli zderzenia atomów gazu następują przy dostatecznie dużych prędkościach, rezultatem tych zderzeń jest jonizacja atomów, tzn. odrywanie się elektronów od jąder atomowych. W przypadku podwyższania gęstości zimnego gazu jonizacja atomów nastąpi wtedy, gdy średnia odległość między jądrami atomowymi będzie bliska promieniowi atomu. Wówczas danego elektronu (w przypadku atomów wieloelektronowych elektronu z zewnętrznych powłok) nie będzie można przypisać żadnemu atomowi, a zatem elektron będzie wolny.

Plazmę kwarkowo-gluonową można, jak się wydaje, otrzymać z gazu hadronowego w podobny sposób. Bardzo istotne jest tutaj, że w odróżnieniu od cząstek elementarnych takich jak elektrony, hadrony nie są obiektami punktowymi, lecz mają niezerowe rozmiary rzędu 1 fm, tj. 10^{-13} cm. Jeśli więc gaz tworzony przez nukleony zwany *materią jądrową* zgnieciemy do gęstości takiej, że średnia odległość między nukleonami będzie istotnie mniejsza niż 1 fm, to spodziewamy się otrzymać plazmę kwarkowo-gluonową. Oczekuje się, że podgrzewanie materii jądrowej również prowadzi do powstania plazmy kwarkowo-gluonowej, choć przyczyny są tutaj inne niż w przypadku plazmy elektronowo-jonowej, gdyż hipoteza uwięzienia zabrania powstawania wydzielonych kwarków w zderzeniach hadronów. Natomiast w zderzeniach szybkich hadronów mogą produkować się nowe hadrony, głównie mezony, co powoduje, że podgrzewanie gazu hadronowego będzie prowadziło do wzrostu jego gęstości i w rezultacie do powstania plazmy.

Fakt, że bardzo gęsta materia jądrowa może istnieć jedynie w formie plazmy kwarkowo-gluonowej, prowadzi niemal automatycznie do wniosku, iż w odpowiednio wczesnej epoce ewolucji Wszechświata jego materię stanowiła plazma kwarkowo-gluonowa, która następnie, gdy gęstość materii obniżyła się, zamieniła się w hadrony. Przypuszcza się również, że plazma istnieje obecnie w niektórych bardzo gęstych obiektach astronomicznych, takich jak gwiazdy neutronowe. Najbardziej jednak intrygująca wydaje się możliwość wytworzenia plazmy kwarkowo-gluonowej w warunkach laboratoryjnych, w zderzeniach ciężkich i bardzo szybkich jąder atomowych. Oczekuje się, że niemal jednoczesne zderzenie wielu nukleonów z zamianą ich energii ruchu postępowego na energię wyprodukowanych cząstek stworzy warunki dla istnienia plazmy kwarkowo-gluonowej. Żywot tak wytworzonej plazmy będzie, niestety, bardzo krótki, rzędu 10^{-22} s. Powstały przy bardzo dużej gęstości układ kwarków i gluonów będzie się bardzo szybko rozszerzał, by przy pewnej krytycznej gęstości zamienić się w hadrony. Eksperymenty przeprowadzone w ostatnich latach zdają się wskazywać, że plazma jest istotnie produkowana w zderzeniach ciężkich jąder, choć interpretacja rezultatów tych eksperymentów jest niejednoznaczna. Uważa się, że dopiero nowa generacja akceleratorów, w których jądra atomowe zostaną przyśpieszone do bardzo wielkich, obecnie niedostępnych energii, umożliwi pełniejsze zbadanie problemu. Niestety, budowa owych akceleratorów to ogromne, wieloletnie przedsięwzięcie, więc na rezultaty przyjdzie jeszcze poczekać.

Zadania

M 610. Wykazać, że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.
Rozwiązanie na str. 8

M 611. Dane są w przestrzeni cztery punkty A, B, C, D. Wykazać, że jeśli prosta łącząca środek odcinka AB ze środkiem odcinka CD jest do obu tych odcinków prostopadła, to $AC = BD$ i $AD = BC$.
Rozwiązanie na str. 8

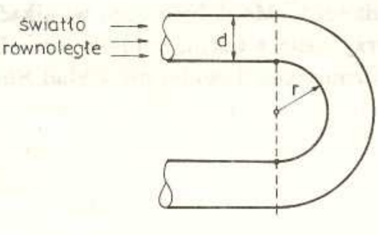
M 612. Ponad połowa powierzchni kuli jest zabrudzona farbą. Wykazać, że istnieje średnica mająca oba końce zabrudzone niezależnie od tego, jak nieregularnie kula została zabrudzona.
Rozwiązanie na str. 8

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

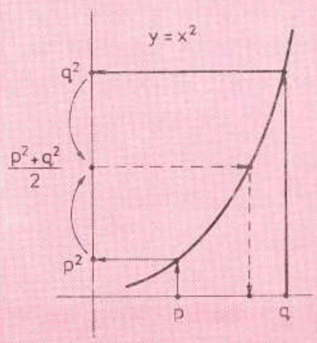
Redaguje Jarosław KULPA

F 319. W czasie burzy kropelki deszczu naładowały się do potencjału 1 V. Na dachu $n = 100$ kropelek utworzyło jedną kroplę. Obliczyć jej potencjał zakładając, że kropelki nie straciły swego pierwotnego ładunku.
Rozwiązanie na str. 9

F 320. Jaki najmniejszy promień krzywizny r (rysunek) może mieć nieposrebrzone włókno światłowodu o średnicy d, aby spełniało nadal swoje zadanie. Współczynnik załamania włókna wynosi n.
Rozwiazanie na str. 9



i postępujmy tak, jak w tamtym przypadku:



poruszamy się najpierw po ciągłych, potem po przerywanych strzałkach

$$\text{śred}_{x^2}(p,q) = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}$$

– Dla $y = x^3$ będzie tak samo:

$$\text{śred}_{x^3}(p,q) = \sqrt[3]{\frac{p^3+q^3}{2}}.$$

– A dla dowolnej funkcji liniowej będzie to zwykła średnia arytmetyczna *ćwiczenie* (po narysowaniu Tales to załatwia!).
– No to zapytajmy od razu, jaka musi być funkcja $f:\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, by za jej pomocą zdefiniować (tak jak wyżej) odpowiadającą jej średnią?
– Do przodu, czyli do osi OY zawsze dojdziemy wzdłuż strzałek ciągłych, ale by móc wrócić po przerywanych, to musi istnieć takie s, że $f(s) = \dfrac{f(p)+f(q)}{2}$.
– Dla tego wystarczy ciągłość funkcji f, bo własność Darboux to gwarantuje. Ale powinno być tylko jedno takie s, bo gdy jest wiele, to które wybrać?
– Różnowartościowość funkcji f zapewni nam jedyność.
– O.K. Zatem

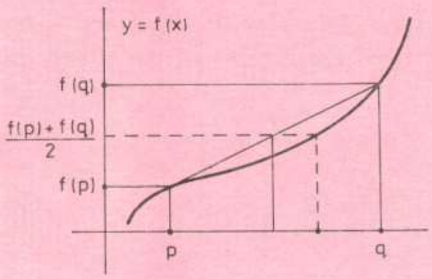
Definicja 2
Dla dowolnej funkcji $f:\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ ciągłej i różnowartościowej (inaczej mówiąc: ciągłej i monotonicznej) definiujemy

$$\text{śred}_f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = f^{-1}\left[\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots f(a_n)}{n}\right].$$

– Popatrz, że średnią geometryczną dostaniemy, gdy za f (w powyższej definicji) przyjmiemy logarytm (o jakiejkolwiek podstawie!) *ćwiczenie*.
– Tak zdefiniowane średnie spełniają też *Definicję* 1.
– Tak, trzeba tylko postąpić tak, jak w przypadku średniej harmonicznej określając $\square_f$ *ćwiczenie*; najlepiej słownie.
– A czy dla każdej średniej określonej za pomocą pewnego działania $\square$ istnieje taka funkcja f, by $\text{śred}_\square \equiv \text{śred}_f$?

– Oj, zostawmy to na później – po co ciągle taka ogólność! Popatrz lepiej na to: średnia geometryczna i harmoniczna liczb p, q leżą na lewo od środka odcinka pq. Czy każda średnia ma tę własność?

– Eee ... chyba nie. O, patrz:



$śred_f(p,q)$

to zależy zapewne od wypukłości funkcji f ćwiczenie.

– Pewnie masz rację. Sądzę, że na dzisiaj wystarczy. Dobranoc!

Następnego dnia, wieczorem:

– Średnia arytmetyczna i geometryczna są związane z pojęciem ciągu arytmetycznego i geometrycznego następującą formułą:

$$(**) \qquad a_n = śred(a_{n-1}, a_{n+1}).$$

Ciągi arytmetyczne i geometryczne są opisane; wiadomo, jak wyglądają. A czy jest coś takiego, jak ciąg harmoniczny?

– Oczywiście, ciąg $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

– Ale czy on spełnia $(**)$?

– Tak. Łatwo sprawdzisz, że tak jest ćwiczenie. Spróbujmy opisać wszystkie ciągi harmoniczne, tzn. ciągi $\{a_n\}$ spełniające $(**)$, gdzie średnia to średnia harmoniczna.

– Chyba trzeba zacząć rachować; wyrazić a_{n+1} za pomocą wcześniejszych

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2a_{n-1} - a_n}.$$

– Oj, dokładnie nic nie widać! A może tak?

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}},$$

co dla $n = 2, 3, 4$ daje :

$$\frac{1}{a_3} = \frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1};$$

$$\frac{1}{a_4} = \frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2} = $$

$$= 2\left[\frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right] - \frac{1}{a_2} =$$

$$= \frac{3}{a_2} - \frac{2}{a_1};$$

$$\frac{1}{a_5} = \ldots = \frac{4}{a_2} - \frac{3}{a_1}.$$

Patrz w niebo

Trzy najobfitsze na Ziemi izotopy ksenonu (o masach atomowych 129, 131 i 132) występują w dość zbliżonych ilościach – po trochę ponad 20%. W latach 60. Roy Lewis i jego koledzy z University of Chicago znaleźli w niektórych meteorytach (a w każdym razie w ich częściach „pierwotnych", tzn. nie zniszczonych przez wysoką temperaturę panującą przy przelocie przez atmosferę) nadmiar – i to dwukrotny – izotopu zarówno ciężkiego, jak i lekkiego. Ksenon ten nazwano ksenonem HL (od słów *heavy* – ciężki i *light* – lekki). Wkrótce zresztą stwierdzono też anomalny skład izotopowy azotu. Powstało przypuszczenie, że te meteoryty pochodzą spoza Układu Słonecznego.

Na początek jednak należało odpowiedzieć na pytanie, gdzie właściwie znajduje się ksenon w tych meteorytach. Wszystko wskazywało na to, że w węglu, który może w nich występować w dużych ilościach. No, ale gdzie – dokładniej? Nastąpiła seria żmudnych prac mających na celu wyodrębnienie frakcji węgla zawierającej ksenon. Najwięcej materiału dostarczył bogaty w węgiel meteoryt Allende, który w 1969 r. spadł w Meksyku. Według słów Lewisa, końcowe usuwanie węgla pozbawionego ksenonu doprowadziło do gwałtownej zmiany wyglądu próbki: stała się ona biała! Ostateczne precyzyjne badania tajemniczego proszku, wliczając w to obserwacje dyfrakcji elektronów na jego ziarnach, dały niezwykły wniosek: są to mikroskopijne diamenty!

Dotychczas w trzech jeszcze meteorytach wykryto diamenty zawierające ksenon. Same diamenty znajdowano w meteorytach już wcześniej. Przypuszcza się, że powstają one, gdy węglowy meteoroid wpada w ziemską atmosferę. Wysoka temperatura i ogromne ciśnienie wywołane przez falę uderzeniową (setki tysięcy atmosfer) prowadzą do powstania drobnych kryształów. Tu jednak, to znaczy np. w meteorycie Allende, diamenty – w dodatku zawierające ksenon – musiały powstać w inny sposób, gdyż znajdowały się w „pierwotnej" materii meteorytu. Jakie więc jest ich pochodzenie?

Hipoteza jest następująca. Prawdopodobnie pył diamentowy powstaje z gazu wyrzuconego przez czerwone olbrzymy – kryształy kondensują się wprost ze stanu gazowego w obszarze, gdzie panuje wprawdzie wysoka temperatura, ale niemal zerowe ciśnienie, a więc w warunkach dotychczas uznawanych za nie sprzyjające „produkcji diamentów". Ksenon HL powstaje później, mianowicie gdy gwiazda stanie się supernową, wtedy bowiem w tym kataklizmie powstają w ogóle najróżniejsze izotopy pierwiastków. Materia rozerwanej gwiazdy dogania otoczkę pyłową i wtedy atomy m.in. ksenonu grzęzną w kryształkach diamentowych. Rzecz jasna, grzęzną tam również inne domieszki, a tylko obecność ksenonu jest względnie łatwa do stwierdzenia. Tak więc pył diamentowy z osobliwym ksenonem byłby namacalną pozostałością po eksplozji jakiejś gwiazdy. To jej resztki mogły następnie wejść w skład materii, z której powstał Układ Słoneczny wraz z meteoroidami „typu Allende". Mogłoby z tego wynikać, że szczypta pyłu diamentowego, otrzymana z takim trudem przez Lewisa i jego grupę, jest materią uformowaną dawniej niż Układ Słoneczny.

Tomasz KWAST

Od przypadku dyskretnego do ciągłego

Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami dodatnimi, to wyrażenia

$$H_n(a_1,\ldots,a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \tag{1}$$

$$G_n(a_1,\ldots,a_n) = (a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{2}$$

$$A_n(a_1,\ldots,a_n) = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \tag{3}$$

nazywamy odpowiednio średnią: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb $a_1,\ldots,a_n$.

Między tymi wielkościami ma miejsce zależność:

$$\begin{aligned}\min(a_1,\ldots,a_n) &\le H_n(a_1,\ldots,a_n) \le G_n(a_1,\ldots,a_n) \le \\ &\le A_n(a_1,\ldots,a_n) \le \max(a_1,\ldots,a_n).\end{aligned} \tag{4}$$

Została ona sformułowana w przypadku dyskretnym.

Zdefiniujemy analogiczne średnie dla funkcji ciągłej $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$. Średnią arytmetyczną funkcji f określimy uogólniając wzór (3) w następujący sposób:

$$A(f;a,b) := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\Big(a+j\cdot\frac{b-a}{n}\Big) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Korzystając z własności funkcji logarytmicznej można łatwo zauważyć związek:

$$\ln(G_n(a_1,\ldots,a_n)) = A_n(\ln a_1, \ln a_2,\ldots,\ln a_n),$$

czyli

$$G_n(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{e}^{A_n(\ln a_1,\ldots,\ln a_n)}.$$

Zatem średnią geometryczną funkcji f jest liczba:

$$G(f;a,b) = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Między wzorami (1) i (3) dostrzegamy zależność:

$$\frac{1}{H_n(a_1,\ldots,a_n)} = A_n\Big(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}\Big),$$

więc średnią harmoniczną funkcji f nazywamy liczbę

$$H(f;a,b) = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

Analogiczna do wzoru (4) jest w „przypadku ciągłym” nierówność

$$\begin{aligned}\min_{x\in[a,b]} f(x) &\le \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x} \le \\ &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max_{x\in[a,b]} f(x).\end{aligned}$$

Jarosław GÓRNICKI

– To wygląda jak ciąg arytmetyczny. Popatrz!

$$a_3 = \frac{1}{\frac{1}{a_2}+1\left[\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right]},$$

$$a_4 = \frac{1}{\frac{1}{a_2}+2\left[\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right]},$$

$$a_5 = \frac{1}{\frac{1}{a_2}+3\left[\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right]},$$

– Oczywiście: ciągi harmoniczne są odwrotnościami ciągów arytmetycznych ćwiczenie! (Niech nauczyciele gnębią uczniów sprawą zer w mianownikach.) Wszystkie są zbieżne do zera ćwiczenie!

– Oj, nie wszystkie, ale to też zostawmy nauczycielom. Ciekawe, czy dla innych średnich w (**) otrzymamy jakieś modyfikacje ciągu arytmetycznego ćwiczenie?

– Po tej wczorajszej zabawie spojrzałem do *Encyklopedii Szkolnej* i tam poza średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną jest jeszcze średnia kwadratowa:

$$\text{śred}_{x^2}(p,q) = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}},$$

spróbujmy zatem dla niej. To chyba nietrudne:

$$a_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}^2+a_{n+1}^2}{2}},$$

$$2a_n^2 = a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2,$$

$$a_{n+1}^2 = 2a_n^2 - a_{n-1}^2,$$

a to przypomina poprzednią zabawę:

$$a_3 = \sqrt{a_2^2+(a_2^2-a_1^2)},$$

$$a_4 = \sqrt{a_2^2+2(a_2^2-a_1^2)},$$

$$a_5 = \sqrt{a_2^2+3(a_2^2-a_1^2)},$$

$$\vdots$$

– Wygląda na to, że ciągi „kwadratowe” są pierwiastkami ciągów arytmetycznych ćwiczenie. Dla innych średnich pewnie będzie tak samo. Coś mi się widzi, że w „przyrodzie” jest tylko jedna średnia – średnia arytmetyczna i tylko ciągi arytmetyczne. Wszystko inne jest tylko wariacją na ten temat.

– Może niezupełnie – ale coś w tym jest.