– A dla większej ilości liczb? Aha:

Definicja 1

$s = \text{śred}_\square(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{s \square s \square \ldots \square s}_{n \text{ razy}} = a_1 \square a_2 \square \ldots \square a_n$.

– Dobrze, ale żeby móc pisać (po prawej stronie) bez nawiasów, to musisz mieć łączność działania $\square$.

– No to mam! $\square$ ma wszystkie własności, jakie są potrzebne dla poprawności tej definicji ćwiczenie! Niech się algebraicy martwią, jakie! O wiele ważniejsze jest, czy przy takiej ogólnej definicji średniej da się dowieść, że w *Zadaniu* 3, przy nowym warunku

$(*)\square \qquad a_{n+1} = \text{śred}_\square(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

ciąg $\{a_n\}$ jest stały (począwszy od trzeciego wyrazu)?

– Chyba potrafię:
mamy

$$a_3 \square a_3 = a_1 \square a_2$$

oraz

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = a_1 \square a_2 \square a_3 ,$$

co daje

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = (a_1 \square a_2) \square a_3,$$
$$a_4 \square a_4 \square a_4 = a_3 \square a_3 \square a_3,$$

czyli gdy $\square$ będzie miało porządne własności (tu przydałoby się coś na kształt pierwiastkowania ćwiczenie), to $a_4 = a_3$; a dalej zapewne indukcją:
$a_4 = a_5 = a_6 = \ldots$

– Oczywiście! Mamy wszystko! Chodźmy spać!
– Zaraz, zaraz, chwileczkę! Czy średnia harmoniczna jest średnią w sensie *Definicji* 1?
– Faktycznie; jest kłopot ze zdefiniowaniem takiego działania $\square_h$, by

$$\text{śred}_{\square_h}(p,q) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2}} .$$

– Mam, ale niezbyt elegancko:

$$p \square_h q = \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} .$$

– Lepiej wygląda, gdy się to wysłowi: $p \square_h q$ jest odwrotnością sumy odwrotności liczb p, q. To teraz mamy już wszystko.
– Fajnie, ale zobaczmy jeszcze konkretne przykłady innych średnich.
– Oj, ciężka sprawa; nie mam pomysłu na jakieś naturalne działanie typu $\square$.
– A może zróbmy analogicznie, jak dla średniej harmonicznej. Średnią harmoniczną odczytywaliśmy rysując hiperbolę; teraz narysujmy parabolę

Plazma kwarkowo-gluonowa

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Układ wielu zjonizowanych atomów, a więc dodatnio naładowanych jonów i elektronów obdarzonych ładunkami ujemnymi, nazywa się *plazmą*, dokładniej *plazmą elektronowo-jonową*. Plazma wykazuje cały szereg niebywale ciekawych i bardzo specyficznych własności i stąd bywa nazywana czwartym stanem materii, po ciałach stałych, cieczach i gazach. Kilka lat temu pojawił się w literaturze naukowej nowy termin – *plazma kwarkowo-gluonowa*, której właśnie jest poświęcony ten krótki artykuł.

Kwarki i gluony to składniki cząstek elementarnych podlegających *silnym oddziaływaniom jądrowym*. Wspomniane cząstki to *hadrony*, do których w szczególności należą protony i neutrony, zwane wspólnie *nukleonami*, tworzące jądra atomowe. Nukleon zbudowany jest z trzech kwarków powiązanych, sklejonych za pomocą gluonów (ang. *glue* – klej). Poza cząstkami trójkwarkowymi istnieją jeszcze wśród hadronów cząstki nazywane *mezonami*, każda tworzona przez parę kwark-antykwark. Kwarki i gluony obdarzone są ładunkami kolorowymi, czymś w rodzaju ładunków elektrycznych, i zdają się mieć tę szczególną cechę, że istnieją jedynie w układach kolorowo neutralnych, takich jak wspomniane nukleony i mezony. Wymieniona cecha stanowi treść *hipotezy uwięzienia*, o której nieco szerzej pisałem w *Delcie* 9/1991. Hipoteza uwięzienia nie wyklucza istnienia układu bardzo wielu kwarków i gluonów uwolnionych z wnętrz hadronów i tworzących makroskopowy układ, który jako całość jest kolorowo neutralny. Taki właśnie układ nazywany jest *plazmą kwarkowo-gluonową*.

Plazmę elektronowo-jonową można otrzymać z gazu atomowego dwoma sposobami – podgrzewając ów gaz lub podwyższając jego gęstość. Jak wiadomo, podgrzewanie gazu prowadzi do wzrostu prędkości atomów w gazie. Jeśli zderzenia atomów gazu następują przy dostatecznie dużych prędkościach, rezultatem tych zderzeń jest jonizacja atomów, tzn. odrywanie się elektronów od jąder atomowych. W przypadku podwyższania gęstości zimnego gazu jonizacja atomów nastąpi wtedy, gdy średnia odległość między jądrami atomowymi będzie bliska promieniowi atomu. Wówczas danego elektronu (w przypadku atomów wieloelektronowych elektronu z zewnętrznych powłok) nie będzie można przypisać żadnemu atomowi, a zatem elektron będzie wolny.

Plazmę kwarkowo-gluonową można, jak się wydaje, otrzymać z gazu hadronowego w podobny sposób. Bardzo istotne jest tutaj, że w odróżnieniu od cząstek elementarnych takich jak elektrony, hadrony nie są obiektami punktowymi, lecz mają niezerowe rozmiary rzędu 1 fm, tj. 10^{-13} cm. Jeśli więc gaz tworzony przez nukleony zwany *materią jądrową* zgnieciemy do gęstości takiej, że średnia odległość między nukleonami będzie istotnie mniejsza niż 1 fm, to spodziewamy się otrzymać plazmę kwarkowo-gluonową. Oczekuje się, że podgrzewanie materii jądrowej również prowadzi do powstania plazmy kwarkowo-gluonowej, choć przyczyny są tutaj inne niż w przypadku plazmy elektronowo-jonowej, gdyż hipoteza uwięzienia zabrania powstawania wydzielonych kwarków w zderzeniach hadronów. Natomiast w zderzeniach szybkich hadronów mogą produkować się nowe hadrony, głównie mezony, co powoduje, że podgrzewanie gazu hadronowego będzie prowadziło do wzrostu jego gęstości i w rezultacie do powstania plazmy.

Fakt, że bardzo gęsta materia jądrowa może istnieć jedynie w formie plazmy kwarkowo-gluonowej, prowadzi niemal automatycznie do wniosku, iż w odpowiednio wczesnej epoce ewolucji Wszechświata jego materię stanowiła plazma kwarkowo-gluonowa, która następnie, gdy gęstość materii obniżyła się, zamieniła się w hadrony. Przypuszcza się również, że plazma istnieje obecnie w niektórych bardzo gęstych obiektach astronomicznych, takich jak gwiazdy neutronowe. Najbardziej jednak intrygująca wydaje się możliwość wytworzenia plazmy kwarkowo-gluonowej w warunkach laboratoryjnych, w zderzeniach ciężkich i bardzo szybkich jąder atomowych. Oczekuje się, że niemal jednoczesne zderzenie wielu nukleonów z zamianą ich energii ruchu postępowego na energię wyprodukowanych cząstek stworzy warunki dla istnienia plazmy kwarkowo-gluonowej. Żywot tak wytworzonej plazmy będzie, niestety, bardzo krótki, rzędu 10^{-22} s. Powstały przy bardzo dużej gęstości układ kwarków i gluonów będzie się bardzo szybko rozszerzał, by przy pewnej krytycznej gęstości zamienić się w hadrony. Eksperymenty przeprowadzone w ostatnich latach zdają się wskazywać, że plazma jest istotnie produkowana w zderzeniach ciężkich jąder, choć interpretacja rezultatów tych eksperymentów jest niejednoznaczna. Uważa się, że dopiero nowa generacja akceleratorów, w których jądra atomowe zostaną przyśpieszone do bardzo wielkich, obecnie niedostępnych energii, umożliwi pełniejsze zbadanie problemu. Niestety, budowa owych akceleratorów to ogromne, wieloletnie przedsięwzięcie, więc na rezultaty przyjdzie jeszcze poczekać.

Zadania

M 610. Wykazać, że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.
Rozwiązanie na str. 8

M 611. Dane są w przestrzeni cztery punkty A, B, C, D. Wykazać, że jeśli prosta łącząca środek odcinka AB ze środkiem odcinka CD jest do obu tych odcinków prostopadła, to $AC = BD$ i $AD = BC$.
Rozwiązanie na str. 8

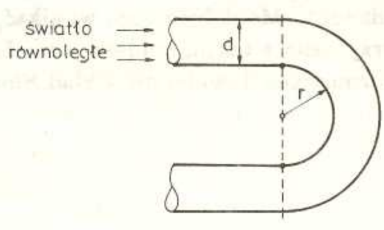
M 612. Ponad połowa powierzchni kuli jest zabrudzona farbą. Wykazać, że istnieje średnica mająca oba końce zabrudzone niezależnie od tego, jak nieregularnie kula została zabrudzona.
Rozwiązanie na str. 8

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

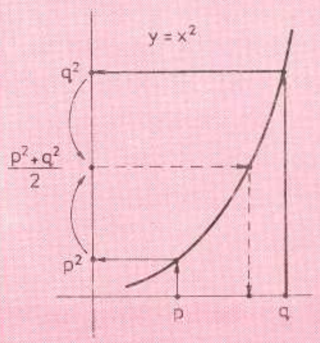
Redaguje Jarosław KULPA

F 319. W czasie burzy kropelki deszczu naładowały się do potencjału 1 V. Na dachu $n = 100$ kropelek utworzyło jedną kroplę. Obliczyć jej potencjał zakładając, że kropelki nie straciły swego pierwotnego ładunku.
Rozwiązanie na str. 9

F 320. Jaki najmniejszy promień krzywizny r (rysunek) może mieć niepostrebrzone włókno światłowodu o średnicy d, aby spełniało nadal swoje zadanie. Współczynnik załamania włókna wynosi n.
Rozwiazanie na str. 9



i postępujmy tak, jak w tamtym przypadku:



poruszamy się najpierw po ciągłych, potem po przerywanych strzałkach

$$\text{śred}_{x^2}(p,q) = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}$$

– Dla $y = x^3$ będzie tak samo:

$$\text{śred}_{x^3}(p,q) = \sqrt[3]{\frac{p^3+q^3}{2}}.$$

– A dla dowolnej funkcji liniowej będzie to zwykła średnia arytmetyczna *ćwiczenie* (po narysowaniu Tales to załatwia!).

– No to zapytajmy od razu, jaka musi być funkcja $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, by za jej pomocą zdefiniować (tak jak wyżej) odpowiadającą jej średnią?

– Do przodu, czyli do osi OY zawsze dojdziemy wzdłuż strzałek ciągłych, ale by móc wrócić po przerywanych, to musi istnieć takie s, że $f(s) = \dfrac{f(p)+f(q)}{2}$.

– Dla tego wystarczy ciągłość funkcji f, bo własność Darboux to gwarantuje. Ale powinno być tylko jedno takie s, bo gdy jest wiele, to które wybrać?

– Różnowartościowość funkcji f zapewni nam jedyność.

– O.K. Zatem

Definicja 2
Dla dowolnej funkcji $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ ciągłej i różnowartościowej (inaczej mówiąc: ciągłej i monotonicznej) definiujemy

$$\text{śred}_f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = f^{-1}\left[\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots f(a_n)}{n}\right].$$

– Popatrz, że średnią geometryczną dostaniemy, gdy za f (w powyższej definicji) przyjmiemy logarytm (o jakiejkolwiek podstawie!) *ćwiczenie*.

– Tak zdefiniowane średnie spełniają też *Definicję* 1.

– Tak, trzeba tylko postąpić tak, jak w przypadku średniej harmonicznej określając $\square_f$ *ćwiczenie*; najlepiej słownie.

– A czy dla każdej średniej określonej za pomocą pewnego działania $\square$ istnieje taka funkcja f, by $\text{śred}_\square \equiv \text{śred}_f$?