Od przypadku dyskretnego do ciągłego

Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami dodatnimi, to wyrażenia

$$H_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \tag{1}$$

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{2}$$

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{3}$$

nazywamy odpowiednio średnią: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Między tymi wielkościami ma miejsce zależność:

$$\begin{aligned} \min(a_1, \ldots, a_n) &\le H_n(a_1, \ldots, a_n) \le G_n(a_1, \ldots, a_n) \le \\ &\le A_n(a_1, \ldots, a_n) \le \max(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Została ona sformułowana w przypadku dyskretnym.

Zdefiniujemy analogiczne średnie dla funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$. Średnią arytmetyczną funkcji f określimy uogólniając wzór (3) w następujący sposób:

$$A(f; a, b) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\Big(a + j \cdot \frac{b-a}{n}\Big) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Korzystając z własności funkcji logarytmicznej można łatwo zauważyć związek:

$$\ln(G_n(a_1, \ldots, a_n)) = A_n(\ln a_1, \ln a_2, \ldots, \ln a_n),$$

czyli

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{e}^{A_n(\ln a_1, \ldots, \ln a_n)}.$$

Zatem średnią geometryczną funkcji f jest liczba:

$$G(f; a, b) = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Między wzorami (1) i (3) dostrzegamy zależność:

$$\frac{1}{H_n(a_1, \ldots, a_n)} = A_n\Big(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\Big),$$

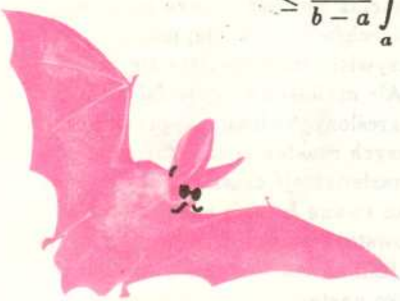
więc średnią harmoniczną funkcji f nazywamy liczbę

$$H(f; a, b) = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

Analogiczna do wzoru (4) jest w „przypadku ciągłym" nierówność

$$\begin{aligned} \min_{x \in [a,b]} f(x) &\le \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x} \le \\ &\le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max_{x \in [a,b]} f(x). \end{aligned}$$

Jarosław GÓRNICKI



– To wygląda jak ciąg arytmetyczny. Popatrz!

$$a_3 = \frac{1}{\frac{1}{a_2} + 1\left[\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right]},$$

$$a_4 = \frac{1}{\frac{1}{a_2} + 2\left[\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right]},$$

$$a_5 = \frac{1}{\frac{1}{a_2} + 3\left[\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right]},$$

– Oczywiście: ciągi harmoniczne są odwrotnościami ciągów arytmetycznych ćwiczenie! (Niech nauczyciele gnębią uczniów sprawą zer w mianownikach.) Wszystkie są zbieżne do zera ćwiczenie!

– Oj, nie wszystkie, ale to też zostawmy nauczycielom. Ciekawe, czy dla innych średnich w (**) otrzymamy jakieś modyfikacje ciągu arytmetycznego ćwiczenie?

– Po tej wczorajszej zabawie spojrzałem do *Encyklopedii Szkolnej* i tam poza średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną jest jeszcze średnia kwadratowa:

$$\text{śred}_{x^2}(p, q) = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2}},$$

spróbujmy zatem dla niej. To chyba nietrudne:

$$a_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2}{2}},$$

$$2a_n^2 = a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2,$$

$$a_{n+1}^2 = 2a_n^2 - a_{n-1}^2,$$

a to przypomina poprzednią zabawę:

$$a_3 = \sqrt{a_2^2 + (a_2^2 - a_1^2)},$$

$$a_4 = \sqrt{a_2^2 + 2(a_2^2 - a_1^2)},$$

$$a_5 = \sqrt{a_2^2 + 3(a_2^2 - a_1^2)},$$

$$\vdots$$

– Wygląda na to, że ciągi „kwadratowe" są pierwiastkami ciągów arytmetycznych ćwiczenie. Dla innych średnich pewnie będzie tak samo. Coś mi się widzi, że w „przyrodzie" jest tylko jedna średnia – średnia arytmetyczna i tylko ciągi arytmetyczne. Wszystko inne jest tylko wariacją na ten temat.

– Może niezupełnie – ale coś w tym jest.