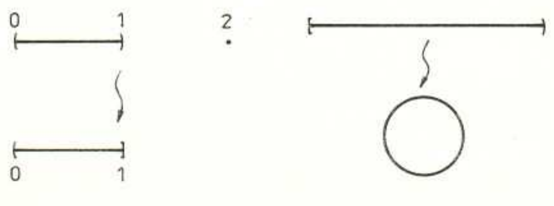
O parach niehomeomorficznych

Homeomorfizm to taka ciągła bijekcja, że funkcja do niej odwrotna też jest ciągła (matematycy czasem mówią krótko: „bijekcja w obie strony ciągła"). Pojęcie to jest bardzo ważne, szczególnie w topologii. Głównym przedmiotem badań topologii są własności, które nie zmieniają się po przekształceniu zbioru przez homeomorfizm (zwane niezmiennikami homeomorfizmów). Praktycznie rzecz biorąc, z reguły w badaniach topologii dwa zbiory homeomorficzne (tzn. takie, że istnieje homeomorfizm przekształcający jeden na drugi) mogą być uważane za nierozróżnialne. Homeomorfizmy są także nazywane izomorfizmami topologicznymi.

Zazwyczaj, gdy bijekcja zachowuje własność wiodącą dla danej struktury matematycznej, to jest już izomorfizmem odpowiednich struktur. Jeśli bijekcja zachowuje porządek, to i funkcja odwrotna do niej ma tę własność. Podobnie dzieje się w przypadku własności algebraicznych. Z izomorfizmami topologicznymi jest jednak inaczej! Bijekcja ciągła nie musi być homeomorfizmem; łatwo podać odpowiednie przykłady. Niech np. $X = (0,1) \cup \{2\}$, $Y = (0,1]$, funkcja f zaś będzie dana wzorem $f(x) = x$ dla $x \neq 2$, a $f(2) = 1$. Nietrudno sprawdzić, że f jest ciągłą bijekcją, ale f^{-1} ciągłą nie jest. Inną taką funkcją jest odwzorowanie, które jednostronnie domknięty odcinek „zwija" w okrąg: $[0, 2\pi) \ni t \to (\cos t, \sin t) \in S$, gdzie $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. W obu przypadkach funkcje odwrotne „rozrywają" dziedzinę, a więc ciągłe być nie mogą. Można wykazać, i nie jest to wcale trudne, że zbiory X i Y w przykładzie pierwszym oraz $[0, 2\pi)$ i S w przykładzie drugim nie są homeomorficzne (rzecz jasna, pokazanie bijekcji ciągłej, która nie jest homeomorfizmem, wcale do tego celu nie wystarcza).



Przychodzi na myśl naturalne pytanie. Załóżmy, że mamy takie zbiory A i B, że istnieją: bijekcja ciągła przekształcająca A na B i bijekcja ciągła zbioru B na A. Czy z tego wynika, że A i B są homeomorficzne?

Odpowiedź jest negatywna, ale znalezienie odpowiedniego przykładu wcale nie jest proste... Napiszemy tu o dwóch takich parach.

Odpowiedzi Redakcji

Grzegorz z Legnicy. Pana niepokój jest zupełnie nieuzasadniony. Może Pan spokojnie przesłać swoją pracę do któregoś z matematycznych czasopism, na pewno nikt z redaktorów nie „przywłaszczy" sobie rezultatów. Deponowanie pracy w zalakowanej kopercie u notariusza jest absolutnie zbędne.

A. J. Prosimy o cierpliwość w oczekiwaniu na ocenę Pańskiego artykułu; jesteśmy dopiero przy lekturze 10587. strony maszynopisu.

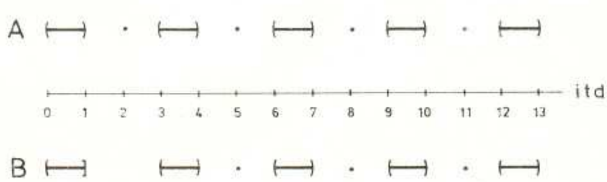
Leonard A., student. Kolega ma rację; istotnie, gdy Galois był w Pana wieku, to nie żył już od trzech lat. Nie przekreśla to jednak Pana szans na zostanie sławnym matematykiem.

Eugeniusz Bazia, Warszawa. Nie wiemy, czy nadesłana przez Pana historia o matematykach jest autentyczna i – ewentualnie – kogo dotyczy. Szczerze mówiąc, słyszeliśmy ją wcześniej o prawnikach. Anegdota nam się podoba, więc umieszczamy ją w *EPSILONIE* (poniżej).

Młody matematyk pojechał na pierwszą w życiu konferencję, gdzie wygłosił referat. Wśród słuchaczy dostrzegł swojego wykładowcę z wczesnych lat studenckich. Po referacie podszedł do niego i zapytał:
– No i jak wyszło – Panie kolego?
Starszy matematyk popatrzył na niego i odpowiedział:
– To już lepiej mów mi „ty".

Zbiory te zostały wymyślone przez Paula Halmosa i Ralpha Foxa w latach pięćdziesiątych (choć matematycy ci wcale nie są przekonani, że nikt nie wpadł na podobny pomysł przed nimi). Pierwszy kontrprzykład jest wyjątkowo elementarny, gdyż dotyczy podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych.

Rozważmy zbiory A i B pokazane na rysunku.



Można zapisać, że

$$A = (0,1) \cup \{2\} \cup (3,4) \cup \{5\} \cup (6,7) \cup \{8\} \cup \ldots$$

zaś

$$B = (A \setminus \{2\}) \cup \{1\}.$$

Odpowiednim odwzorowaniem ciągłym z A na B jest funkcja, która dwójce przyporządkowuje jedynkę, resztę zaś pozostawia bez zmian (dokleja pierwszy „samotny" punkt do pierwszego przedziału). W drugą stronę – doklejamy drugi przedział do pierwszego, „ściskamy" (innymi słowy, $x \to x/2$ – aby otrzymać $(0,1)$, nie zaś $(0,2)$), a wszystkie pozostałe punkty przesuwamy o 3 w lewo. Czytelnik zechce zapisać te funkcje wzorami.

Zbiory A i B nie są jednak homeomorficzne...

cdn.*

*To nie jest „c.n.d.", choć w wielu podręcznikach ów skrót pojawia się w takich właśnie miejscach, lecz „cdn.".

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.