Od kiedy i dlaczego istnieje π

Marek KORDOS

Łatwo zauważyć, że nie ma nic nadzwyczajnego w fakcie, że stosunek długości okręgu do jego średnicy jest taki sam dla wszystkich okręgów. Przecież dowolne dwa okręgi są jednokładne, a jednokładność zachowuje stosunek długości. Podobnie jest np. dla stosunku obwodu pięciokąta foremnego do promienia okręgu opisanego na nim. Czemu wobec tego pierwszy z tych stosunków – liczba π – jest ważną stałą matematyczną, a ten drugi stosunek nie?

Oto uzasadnienie pochodzące od Archimedesa (-287;-212), który pierwszy zwrócił uwagę na doniosłość liczby π. Mianowicie liczba π pozwala prosto wyrazić nie tylko stosunek długości okręgu do jego promienia (wyrażany wzorem $2\pi r$), lecz także stosunek pola koła do kwadratu jego promienia (co daje wzór πr^2), stosunek pola sfery do kwadratu jej promienia (co daje wzór $4\pi r^2$) i stosunek objętości kuli do sześcianu jej promienia (co daje wzór $\frac{4}{3}\pi r^3$).

Archimedes starał się możliwie dokładnie obliczyć π. Jego wynik był następujący:

$$3\frac{1137}{8069} < \pi < 3\frac{1335}{9347},$$

czyli mniej więcej

$$3,1409096 < \pi < 3,1428265,$$

a więc dokładność była duża – przedział ma długość niecałe $0,002$.

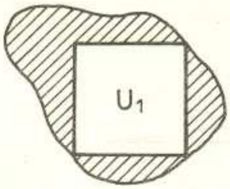
Zauważmy, że π obsługujące jeden z tych wzorów (obojętnie który) to jakaś tam stała proporcjonalności. Chcąc jednak w pozostałych wzorach napisać π trzeba udowodnić, że jest to to samo π, ta sama liczba. I takie właśnie dowody Archimedes przeprowadził. Jako „wyjściowe" π wziął stosunek długości okręgu do jego średnicy.

Dla uzasadnienia, że π „okręgowe" jest równe π „kołowemu", użył dwóch sprytnych twierdzeń o aproksymacji koła wielokątami:

Twierdzenie 1. *Jeśli pole $|F|$ figury F jest mniejsze od pola koła K, to istnieje taki wielokąt W wpisany w to koło, że $|W|>|F|$.*

Twierdzenie 2. *Jeśli pole figury F jest większe od pola koła K, to istnieje taki wielokąt W opisany na tym kole, że $|W|<|F|$.*

Aby to udowodnić, należy wykazać, że pole koła K może być dowolnie przybliżone:
1° od dołu przez wielokąty wpisane w K,
2° od góry przez wielokąty opisane na K.
Istotnie, jeśli dowolnie dobrze, to może być przybliżone lepiej niż $|K|-|F|$ (czy też $|F|-|K|$).



Aby to wykazać, Archimedes użył metody wyczerpywania. Polega ona na tym, że dowolnie dobre przybliżenie pola jakiejś figury S uzyskujemy wyjmując z niej figurę U_1 (której pole umiemy ustalić) o polu większym niż $\frac{1}{2}|S|$, z pozostałości – figurę U_2 (jw.) o polu większym niż połowa tego, co zostało po poprzednim wyjęciu, z pozostałości – figurę U_3 (jw.) itd. Tym przybliżeniem jest suma

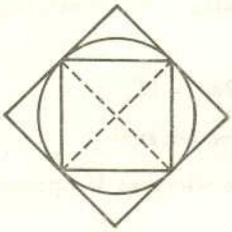
$$|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n|.$$

Dlaczego jest ono dowolnie dobre? Bo

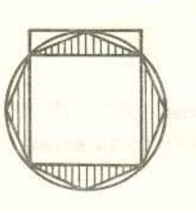
$$|S| \geq |U_1| + |U_2| + |U_3| + \ldots \geq \frac{|S|}{2} + \frac{|S|}{4} + \frac{|S|}{8} + \ldots = |S|.$$

Szerzej o metodzie wyczerpywania pisałem w artykule *Całka Eudoksosa* (*Delta* 7/1989.)

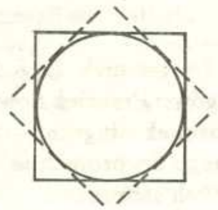
Cała sztuka polega tylko na wykazaniu, że w każdym kroku wyjmujemy więcej niż połowę tego, co jeszcze zostało – przecież nie wiemy, jakie jest $|S|$.
Oto przybliżenie koła $2n$-kątami foremnymi. Zaczynamy od kwadratu. Dowód, że kwadrat wpisany w koło to więcej niż połowa tego koła, widać na rysunku; kwadrat opisany na kole ma pole dokładnie dwa razy takie, jak wpisany, a koło istotnie zawiera się w tym większym kwadracie.



U_1 to właśnie kwadrat. U_2 to cztery trójkąty z kolejnego rysunku (nikt przecież nie żądał, by U_i było w jednym kawałku). Rysując styczną w wierzchołku trójkąta i odcinki prostopadłe do podstawy w pozostałych wierzchołkach otrzymujemy prostokąt o polu dwa razy większym od pola trójkąta, a więc więcej niż dwa razy większym od zawartego w tym prostokącie fragmentu koła. Zatem $|U_2|>\frac{1}{2}(|S|-|U_1|)$. I tę operację powtarzamy, bo uzasadnienie, że $|U_{i+1}|>\frac{1}{2}(|S|-|U_1|-|U_2|-\ldots-|U_i|)$ jest takie samo, jak dla $i=1$.

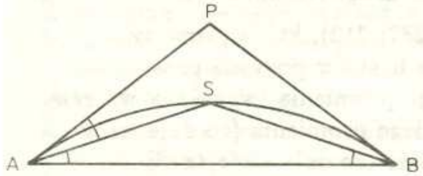


Koło udało się przybliżyć wielokątami wpisanymi w to koło, a więc twierdzenie 1 jest udowodnione.



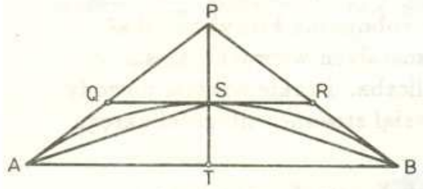
Co jednak wyczerpywać dla udowodnienia twierdzenia 2? Archimedes wyczerpywał różnicę między kwadratem opisanym na kole i kołem. Kolejne U_i otrzymujemy jako sumę „rogów" obciętych wzdłuż stycznych w środku łuku ograniczajacego każdy z trójkątów krzywoliniowych, z jakich składa się każda kolejna pozostałość. Wystarczy zatem wykazać, że obcinając taki trójkąt obcinamy więcej niż połowę rogu.

W tym celu potrzebne jest drobne twierdzenie pomocnicze:

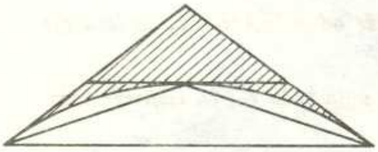


Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, a punkt S jest środkiem mniejszego z łuków o końcach w punktach A i B, to AS jest dwusieczną kąta PAB.

Łatwo je uzasadnić: kąt SAB jest równy kątowi SBA (bo trójkąt ASB jest równoramienny), ten zaś kątowi PAS (jako wpisany i dopisany oparte na tym samym łuku AS – oba są równe połowie kąta środkowego opartego na tym łuku).



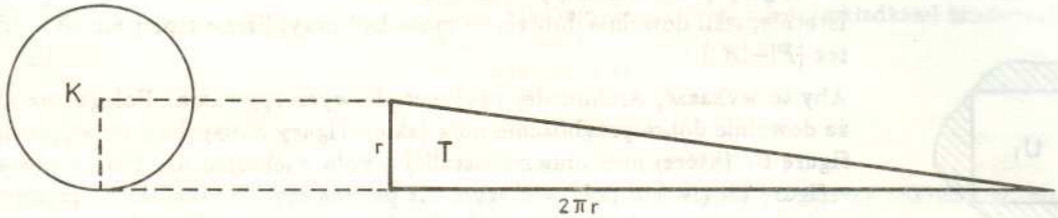
Wróćmy do obcinania rogów. Na rysunku pole trójkąta QPR jest większe od sumy pól trójkątów QAS i RBS. Dlaczego? Bo $|\triangle QPR| = |\triangle QPS| + |\triangle RPS|$. Trójkąty QPS i QAS mają wspólną podstawę. Wysokość QPS to PS, natomiast wysokość QAS jest równa ST. Ale $PS > ST$, bo dwusieczna (w trójkącie APT) dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do przyległych do nich boków, a $AP > AT$. Stąd $|\triangle QPS| > |\triangle QAS|$, co ze względu na symetrię rysunku kończy uzasadnienie.



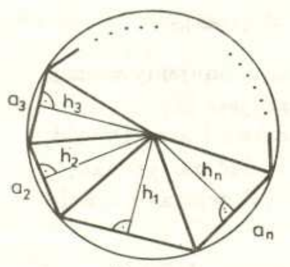
Na koniec wystarczy zauważyć, że wyczerpywany trójkąt krzywoliniowy zawiera się istotnie w sumie trójkątów QPR, QAS i RBS.

Wyczerpaliśmy zatem różnicę kwadratu opisanego na kole i koła. Zatem również twierdzenie 2 jest prawdziwe.

Możemy już teraz przejść do dowodu zapowiedzianej równości π „okręgowego" i „kołowego".



Weźmy pod uwagę koło K i trójkąt prostokątny T o jednej przyprostokątnej równej r (promieniowi koła), a drugiej równej $2\pi r$ (długości okręgu). Jeśli $|K| > |T|$, to istnieje (tw. 1) wielokąt W wpisany w koło i spełniający warunek $|W| > |T|$. Obliczamy

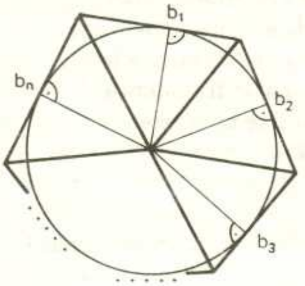


$$|W| = \frac{1}{2}a_1h_1 + \frac{1}{2}a_2h_2 + \ldots + \frac{1}{2}a_nh_n\,,$$

gdzie a_i to boki wielokąta W, a h_i – ich odległości od środka koła. Niech h_{max} oznacza największą z liczb h_i; wówczas

$$|W| \leq \frac{1}{2}h_{max}\cdot(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < \frac{1}{2}r\cdot 2\pi r = |T|\,.$$

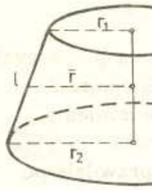
Otrzymaliśmy sprzeczność. Możliwość $|K| > |T|$ trzeba więc odrzucić.



Przypuśćmy z kolei, że $|K| < |T|$. Wówczas (tw. 2) istnieje wielokąt V opisany na kole i spełniający warunek $|V| < |T|$. Tym razem

$$|V| = \frac{1}{2}r\cdot b_1 + \frac{1}{2}r\cdot b_2 + \ldots + \frac{1}{2}r\cdot b_m =$$
$$= \frac{1}{2}r\cdot(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) > \frac{1}{2}r\cdot 2\pi r = |T|\,.$$

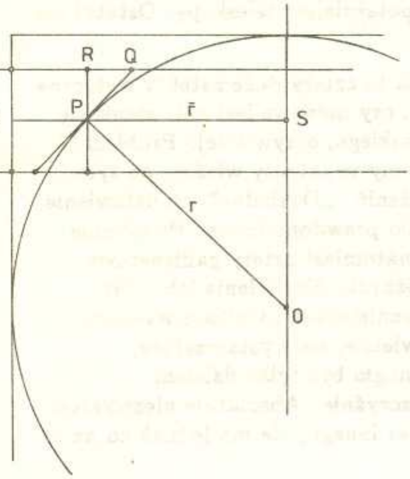
Znów sprzeczność. Odrzucić trzeba zatem również możliwość $|K| < |T|$. Pozostaje tylko $|K| = |T|$, a o to nam chodziło. Liczba π we wzorze $2\pi r$ to ta sama liczba π, co we wzorze πr^2.



Zanim przejdziemy do dalszych utożsamień, zauważmy, że π we wzorach na pole powierzchni bocznej walca ($2\pi rh$) czy stożka (πrl), jak też we wzorach na objętość walca ($\pi r^2 h$) i stożka ($\frac{1}{3}\pi r^2 h$) jest to samo, co we wzorach na długość okręgu czy pole koła – wyprowadzenia zna każdy uczeń szkoły średniej (bądź też powinien znać). Do wzorów zawierających „sprawdzone" π dopiszmy jeszcze wzór na pole powierzchni bocznej stożka ściętego: $\pi l(r_1+r_2)=2\pi\bar{r}l$.

A teraz dowód Archimedesa, że π „okręgowe" jest równe π „sferycznemu".

Na sferze opiszemy walec. Ma on zatem promień podstawy równy r, a wysokość równą $2r$. Sprawdźmy, że jeśli przetniemy dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy walca obie te powierzchnie, to obręcz wycięta z powierzchni walca będzie miała pole równe polu powierzchni bocznej stożka ściętego stycznego do sfery w połowie odległości od płaszczyzn i ograniczonego tymi płaszczyznami. Aby to wykazać, posłużymy się przekrojem osiowym walca (i, rzecz jasna, sfery).



Z podobieństwa trójkątów OPS i QPR (są prostokątne i mają $\angle OPS=\angle QPR$) wynika, że

$$\frac{OP}{PS}=\frac{QP}{PR}, \quad \text{czyli} \quad OP\cdot PR = PS\cdot QP\,,$$

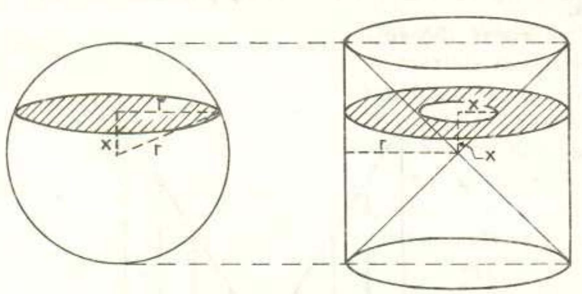
co zapisane w innych oznaczeniach daje

$$r\cdot\frac{h}{2}=\bar{r}\cdot\frac{l}{2}, \quad \text{czyli} \quad 2\pi rh = 2\pi\bar{r}l\,,$$

a to właśnie mieliśmy wykazać.

W tym miejscu Archimedes zauważa, że biorąc podział walca i sfery płaszczyznami o bardzo małej odległości uzyskujemy sytuację, w której rodzina opisanych na sferze stożków ściętych dowolnie dokładnie przybliża tę sferę. Ale suma pól ich powierzchni bocznych jest zawsze – niezależnie od tego, jakie odległości płaszczyzn rozpatrujemy – równa polu powierzchni bocznej całego walca, czyli $4\pi r^2$. Stąd, ponieważ niezależnie od dokładności przybliżenia otrzymujemy ten sam wynik, pole sfery jest równe $4\pi r^2$ i π „sferyczne" jest równe π „okręgowemu".

Na koniec (w tej samej pracy, w której znajduje się przytoczone wyżej rozważanie dotyczące sfery, a mianowicie *O kuli i walcu*) Archimedes dowodzi, że π „kołowe" i π „kuliste" są równe.



Tym razem narysujmy rozpatrywany wyżej walec obok kuli – obie bryły postawmy na jednej płaszczyźnie. W walcu wytnijmy jednak dwa stożki mające za podstawy – podstawy walca, a za wspólny wierzchołek – jego środek.

Przecinając obie bryły płaszczyzną równoległą do podstaw walca otrzymamy, odpowiednio, koło o polu $\pi\bar{r}^2$ i pierścień kołowy o polu równym $\pi r^2-\pi x^2$. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa oba pola są równe.

Dalej Archimedes argumentuje tak: nalewając do obu brył wody (czyli bryły traktujemy jak puste wewnątrz naczynia) w każdym momencie, na każdym poziomie dolewamy jej tyle samo. Stąd objętość (= ilość wody, jaką pomieszczą) jest równa. Ale dla walca z wyciętymi stożkami obliczenie objętości jest łatwe:

$$\pi r^2\cdot 2r - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

I tyle wynosi objętość kuli, co pokazuje, że „kuliste" π jest takie samo, jak trzy pozostałe.

Później, ponad półtora tysiąca lat później, znaleziono liczbę π jeszcze w innych miejscach, a to dzięki stworzonej przez Newtona i Leibniza analizie matematycznej. Zapewne jednak wcale by jej nie szukano, gdyby nie miała ona ugruntowanej pozycji ważnej stałej matematycznej, którą zapewnił jej Archimedes.