Lemat Spernera, punkty stałe i algebra

Janusz DRONKA, Jarosław GÓRNICKI

Rozwiązanie zadania M 609. Niech CD będzie dowolną średnicą okręgu. Mamy

$$2 = CD \le CA_1 + A_1D,$$
$$2 = CD \le CA_2 + A_2D,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2 = CD \le CA_n + A_nD.$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy

$$2n \le (CA_1 + \ldots + CA_n) + (A_1D + \ldots + A_nD).$$

Dlatego jeden z końców średnicy spełnia warunek zadania.

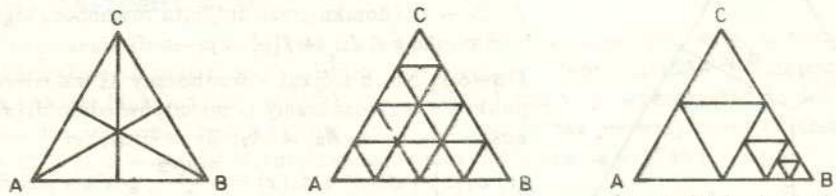
1. Wstęp

Jednym z ważniejszych kierunków rozwojowych XIX-wiecznej matematyki była powstająca wówczas *analysis situs* zwana inaczej topologią. Zajmuje się ona własnościami figur geometrycznych, które zachowują się nawet wtedy, gdy deformujemy je tak znacznie, iż tracą one wszelkie swoje własności metryczne i rzutowe.

Wiele faktów topologii jest tak ważnych, że matematykowi (i nie tylko) nie wypada ich nie znać. Typowym przykładem jest tu twierdzenie Brouwera z 1911 roku o punkcie stałym, które prezentujemy poniżej. Jest ono intuicyjnie znacznie mniej oczywiste niż większość faktów topologicznych, ma różne dowody i znalazło szereg zastosowań.

2. Lematy Spernera

Podział trójkąta na skończoną liczbę mniejszych trójkątów w taki sposób, aby przekrój każdych dwóch trójkątów podziału był ich wspólnym bokiem, wspólnym wierzchołkiem lub zbiorem pustym, będziemy nazywać podziałem symplicjalnym – triangulacją.



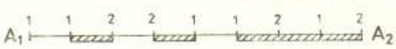
podziały symplicjalne   ten podział nie jest symplicjalny

Lemat 1 (Emanuel Sperner, 1928). Podzielmy symplicjalnie trójkąt $A_1A_2A_3$. Wierzchołki trójkątów podziału tak ponumerujemy liczbami $1, 2, 3$, że

(∗) A_i ma numer i, wierzchołek leżący na boku A_iA_j ma numer i lub j, pozostałe zaś wierzchołki mają dowolne numery.

Wtedy wśród trójkątów podziału istnieje taki, którego wierzchołki mają numerację $1, 2, 3$.

Numerację spełniającą warunek (∗) nazywamy spernerowską.



Dowód. Wierzchołki trójkątów podziału numerujemy zgodnie z warunkiem (∗). W rodzinie wszystkich boków trójkątów tego podziału wyróżniamy te, których końcom przypisano dwie liczby: 1 i 2. Oznaczmy rodzinę tych boków przez $\mathcal{R}$. W rodzinie $\mathcal{R}$ rozpatrzmy boki leżące na odcinku A_1A_2. Liczba u tych boków jest nieparzysta (rysunek obok), co jako oczywiste pozostawiamy bez dowodu. Niech T będzie trójkątem podziału, wtedy przez $v(T)$ oznaczamy liczbę boków T należących do rodziny $\mathcal{R}$. Jeżeli przez $w(T)$ oznaczymy zbiór wartości przyjmowanych w wierzchołkach T, to łatwo stwierdzimy zależności:

1. jeżeli $w(T) = \{1, 2, 3\}$, to $v(T) = 1$;
2. jeżeli $\{1, 2\} \subset w(T) \neq \{1, 2, 3\}$, to $v(T) = 2$;
3. jeżeli $\{1, 2\} \not\subset w(T)$, to $v(T) = 0$.

Zatem, jeśli r jest liczbą trójkątów podziału, które w wierzchołkach mają numerację $1, 2, 3$, to

$$r \equiv \sum v(T) \pmod 2$$

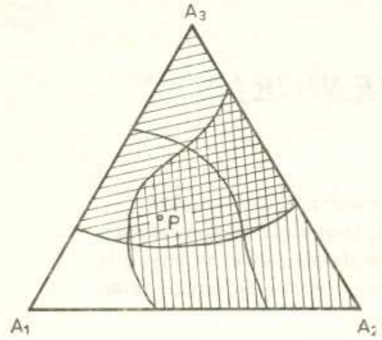
(liczby r i $\sum v(T)$ są obie parzyste bądź obie nieparzyste). W $\sum v(T)$ każdy z boków rodziny $\mathcal{R}$ liczony jest jeden raz, gdy zawiera się w odcinku A_1A_2 i dwukrotnie w pozostałych przypadkach. Mamy więc

$$\sum v(T) \equiv u \pmod 2,$$

skąd

$$r \equiv u \pmod 2.$$

Z nieparzystości liczby u wynika nieparzystość liczby r. W ten sposób pokazaliśmy fakt mocniejszy: liczba r trójkątów z podziału symplicjalnego, których wierzchołki mają numerację $1, 2, 3$, jest nieparzysta.



Możliwość wyboru gwarantuje twierdzenie Bolzano–Weierstrassa: w każdym ograniczonym ciągu punktów na płaszczyźnie istnieje podciąg zbieżny.

Wykorzystując ten rezultat przedstawimy kolejny wynik Spernera zwany „lematem o zamocowaniu".

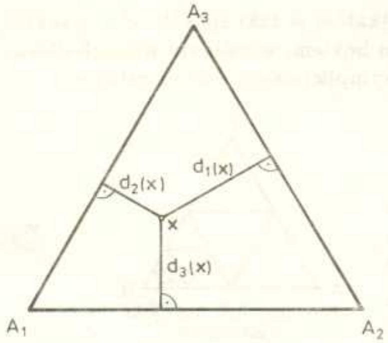
Lemat 2 (E. Sperner, 1928). Jeżeli trójkąt $A_1A_2A_3$ będzie pokryty takimi zbiorami domkniętymi R_1, R_2, R_3, że

(**) R_i jest rozłączny z bokiem przeciwległym wierzchołkowi A_i,

to istnieje taki punkt $p \in \triangle A_1A_2A_3$, że $p \in R_1 \cap R_2 \cap R_3$.

Dowód. Niech (ε_n) będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych, zbieżnym do zera. Dla każdego n tworzymy podziały symplicjalne trójkąta $A_1A_2A_3$ na trójkąty $\triangle_j^{(n)}$ tak, że $\triangle_i^n$ jest zawarty w kole o promieniu ε_n dla każdego j. Wierzchołek trójkąta $\triangle_j^{(n)}$ otrzymuje dowolny numer zbiorów R_k, do których należy. Tego rodzaju numeracja jest spernerowska. Z lematu 1 wynika, że dla każdego n w podziale symplicjalnym trójkąta $A_1A_2A_3$ istnieje trójkąt $B_nC_nD_n$, którego wierzchołki mają numerację $1, 2, 3$. Możemy wybrać podciąg (n_i) tak, aby ciągi punktów $(B_{n_i}) \subset R_1$, $(C_{n_i}) \subset R_2$, $(D_{n_i}) \subset R_3$ były zbieżne do tego samego punktu p, który ze względu na domkniętość zbiorów pokrycia należy do $R_1 \cap R_2 \cap R_3$.

3. Twierdzenie Brouwera



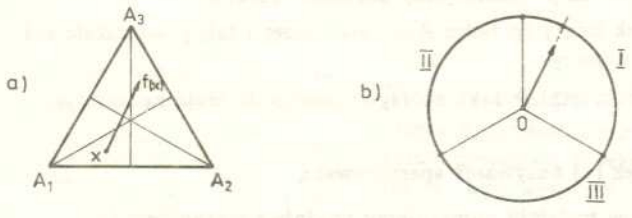
Rozważmy teraz trójkąt równoboczny. Udowodnimy

Twierdzenie 1 (Leitzen E. J. Brouwer, 1911). Dla każdego ciągłego odwzorowania $f : \triangle \to \triangle$ (domkniętego trójkąta równobocznego w siebie) istnieje punkt stały, tzn. taki punkt $p \in \triangle$, że $f(p) = p$.

Dowód. Niech trójkąt równoboczny $\triangle$ ma wierzchołki A_1, A_2, A_3. Dla dowolnego punktu $x \in \triangle$ oznaczmy przez odpowiednio $d_1(x)$, $d_2(x)$, $d_3(x)$ odległości punktu x od boków A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2. Zauważmy, że:

(1) $d_1(x) + d_2(x) + d_3(x) = \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$, gdzie a jest długością boku trójkąta,

(2) nieujemne liczby $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, takie, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, wyznaczają taki punkt $x \in \triangle$, że $d_i(x) = \alpha_i$ dla $i = 1, 2, 3$.



Sposób określenia przynależności punktu x: w trójkącie równobocznym wysokości wyznaczają pewne kierunki. Zaznaczamy je w kole, przenosząc równolegle, jak na rysunku (b). Dzielą one brzeg koła na trzy równe łuki, które odpowiednio numerujemy. W każdym punkcie $x \in \triangle$ zaczepiamy wektor o końcu w punkcie $f(x)$ (rys. (a)). Następnie przesuwając ten wektor równolegle zaczepiamy go w punkcie O. Koniec tak otrzymanego wektora rzutujemy radialnie (wzdłuż promienia) na brzeg koła. Numer łuku, do którego należy otrzymany punkt, jest numerem zbioru R_i, do którego należy punkt x.

Niech $f : \triangle \to \triangle$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy ponadto, że $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \triangle$. Możemy wówczas trójkąt pokryć zbiorami R_i, $(i = 1, 2, 3)$ utworzonymi następująco: punkt $x \in \triangle$ należy do zbioru pokrycia o takim numerze j, dla którego

$$(***) \qquad d_j(f(x)) \leq d_j(x)$$

i różnica

$$d_j(x) - d_j(f(x))$$

jest możliwie największa.

W przypadku, gdy dla dwóch liczb j, k $(j \neq k)$ spełniony jest warunek (***) oraz

$$d_j(x) - d_j(f(x)) = d_k(x) - d_k(f(x)),$$

punkt x zaliczamy tak do zbioru R_j, jak i do zbioru R_k.

Wówczas:
- każdy punkt trójkąta należy do co najmniej jednego zbioru z pokrycia,
- zbiory R_i są domknięte,
- zbiory R_i są rozłączne z bokiem przeciwległym wierzchołkowi A_i,

a co najważniejsze $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$ (dlaczego?). Otrzymana sprzeczność z lematem 2 gwarantuje prawdziwość twierdzenia.

Wykazana własność punktu stałego jest niezmiennikiem topologicznym, jeśli bowiem ma ją trójkąt domknięty, to ma także każdy zbiór z nim homeomorficzny.

O figurze, która ma tę własność, że każde ciągłe przekształcenie w siebie ma punkt stały mówimy, iż ma własność punktu stałego.

Mówimy, że dwa zbiory A i B są homeomorficzne, jeśli istnieje ciągłe różnowartościowe odwzorowanie $h : A \to h(A) = B$ mające ciągłe odwzorowanie odwrotne $h^{-1} : B \to A$.

Istotnie, niech ciągłe odwzorowania $h : \triangle \to K$, $h^{-1} : K \to \triangle$ ustalają homeomorfizm zbioru K z trójkątem. Rozpatrzmy ciągłe odwzorowanie $F : K \to K$. Wykażemy, że F ma punkt stały. Otóż złożenie

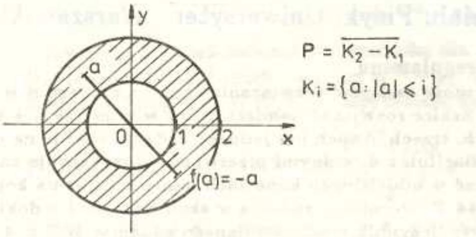
$$h^{-1} \circ F \circ h : \triangle \to \triangle$$

ma punkt stały (na mocy twierdzenia Brouwera): $x = (h^{-1} \circ F \circ h)(x)$. Zatem

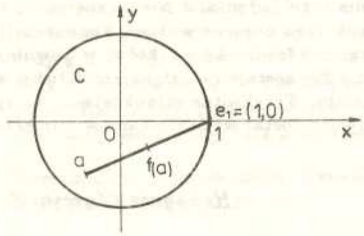
$$h(x) = (h \circ h^{-1} \circ F \circ h)(x) = F(h(x)),$$

co kończy uzasadnienie.

Nie wszystkie podzbiory płaszczyzny mają taką miłą własność. Oto dwa przykłady:

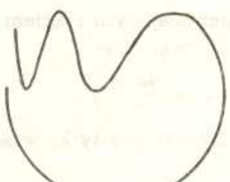


Przykład 1. Pierścień P jest zbiorem domkniętym, ograniczonym o niepustym wnętrzu. Ciągłe odwzorowanie antypodyczne $f : P \to P$ dane wzorem $f(a) = -a$ nie ma punktu stałego.



Przykład 2. Dla koła otwartego $C = \{a : |a| < 1\}$ odwzorowanie $f : C \to C$ dane wzorem $f(a) = \frac{1}{2}(a + e_1)$, jest ciągłe i nie ma punktów stałych.

Symbolem $|a|$ oznaczamy odległość (euklidesową) punktu a od punktu $0 = (0,0)$.



„Okrąg warszawski" (serpentyny utworzone są przez odpowiedni fragment wykresu funkcji $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$). Każde ciągłe odwzorowanie $f : W \to W$ ma punkt stały.

Musimy jednak zaznaczyć, że istnieją zbiory płaskie, które nie są homeomorficzne z trójkątem (np. okrąg warszawski), a mają własność punktu stałego (*Delta* 9/1980).

4. Zastosowania

Twierdzenie Brouwera znalazło wiele zastosowań poza topologią, m.in. w teorii równań różniczkowych przy dowodzie istnienia rozwiązań, w teorii układów dynamicznych, w analizie funkcjonalnej, w algebrze ... Oto jak można je wykorzystać do dowodu zasadniczego twierdzenia algebry, dowiedzionego po raz pierwszy przez Gaussa w 1799 r., a wcześniej sformułowanego przez d'Alemberta w 1746 r.

Twierdzenie 2. Każdy wielomian zespolony stopnia większego lub równego 1 ma pierwiastek zespolony.

Dowód. Rozważmy wielomian zespolony

$$f(z) = z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0, \qquad n \geq 1, \quad a_i \text{ – zespolone.}$$

Niech $R = 2 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| \geq 2$. Funkcja g dana wzorem

$$g(z) = \begin{cases} z - \dfrac{f(z)}{R^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\theta r}} & \text{dla } z = r \cdot e^{i\theta},\ 0 \leq r \leq 1, \\[2mm] z - \dfrac{f(z)}{R^{n-1} \cdot z^{n-1}} & \text{dla } 1 < |z| \leq R \end{cases}$$

jest ciągła (!). Przekształca ona koło domknięte $K_R = \{z : |z| \leq R\}$ w siebie. Istotnie, gdy $0 \leq |z| \leq 1$, to

$$|g(z)| = \left| z - \frac{f(z)}{R^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\theta r}} \right| \leq 1 + \frac{|f(z)|}{R^{n-1}} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{|z|^n + |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \ldots + |a_1| \cdot |z| + |a_0|}{R^{n-1}} \leq 1 + \frac{R-1}{R^{n-1}} \leq R.$$

Gdy $1 < |z| \leq R$, to

$$|g(z)| = \left| z - \frac{f(z)}{R^{n-1} \cdot z^{n-1}} \right| = \frac{|(R^{n-1} - 1) \cdot z^n - a_{n-1} \cdot z^{n-1} - \ldots - a_0|}{R^{n-1} \cdot |z|^{n-1}} \leq$$

$$\leq \frac{(R^{n-1} - 1) \cdot R}{R^{n-1}} + \frac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| \cdot \frac{1}{|z|} + \ldots + |a_0| \cdot \left(\frac{1}{|z|}\right)^{n-1}}{R^{n-1}} \leq$$

$$\leq R - \frac{R}{R^{n-1}} + \frac{R-2}{R^{n-1}} = R - \frac{2}{R^{n-1}} \leq R.$$

Zbiór K_R jest homeomorficzny z trójkątem, funkcja g jest ciągła, więc na mocy twierdzenia Brouwera istnieje taki punkt $z \in K_R$, że $g(z) = z$. Warunek ten w oczywisty sposób równoważny jest stwierdzeniu: istnieje takie $z \in K_R$, że $f(z) = 0$.

Na zakończenie uwaga. Z dowodu tego twierdzenia wynika, że w kole K_R istnieje pierwiastek wielomianu $f(z)$. Rodzi to pytania:

1. Jaki jest najmniejszy promień koła o środku w punkcie zero zawierającego wszystkie pierwiastki wielomianu $f(z)$?
2. Jakie jest w ogóle najmniejsze koło zawierające wszystkie pierwiastki wielomianu $f(z)$?

Kilka wyników z tego zakresu (choć nie ostatecznych, jak się wydaje) omawia A. Turowicz w *Geometrii zer wielomianów*.

Rozwiązanie zadania M 608.
Przypuśćmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich $l < n$. Udowodnimy, że jest prawdziwe dla n, i w ten sposób przeprowadzimy dowód indukcyjny (przypadek $n = 1$ nie jest trudny).

Przypadek 1. Istnieje grupa $k < n$ chłopców, którzy mają dokładnie k dziewczyn. Na mocy założenia indukcyjnego można każdego z nich ożenić z dziewczyną. Zauważmy teraz, że pozostała grupa chłopców również spełnia założenie indukcyjne: gdyby bowiem tak nie było, to pewna grupa s chłopców miałaby wtedy nie więcej niż $s - 1$ dziewczyn i istniałaby grupa $s + k$ chłopców, mająca $s + k - 1$ dziewczyn.

Przypadek 2. Każda grupa k chłopców ma co najmniej $k + 1$ dziewczyn; wtedy żenimy jednego z chłopców z jego dziewczyną. Pozostali znów spełniają założenie indukcyjne, co kończy dowód.