Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1991

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Zadania z matematyki nr 225, 226

Redaguje Marcin E. KUCZMA

225. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające równanie

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 6 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

226. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie niemalejącym ciągiem liczb dodatnich. Określamy ciąg $b_1, b_2, \ldots$ wzorem:

$$b_n = n - \left(\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Udowodnić, że ciąg (b_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny.

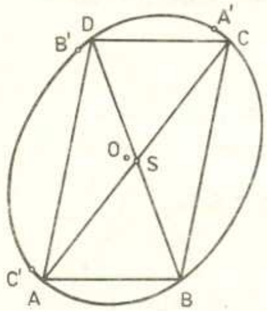
Zadanie **226** zaproponował pan Łukasz Wiechecki z Legnicy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1991

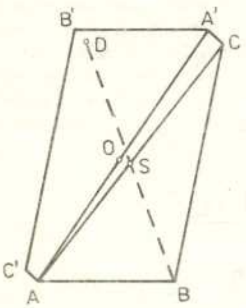
Przypominamy treść zadań:

221. (a) W ściśle wypukły środkowo-symetryczny zbiór na płaszczyźnie wpisano wielokąt środkowo-symetryczny. Dowieść, że środki symetrii obu figur pokrywają się.
(b) Dać przykład ściśle wypukłego środkowo-symetrycznego zbioru w przestrzeni oraz wpisanego weń środkowo-symetrycznego wielościanu (nie zdegenerowanego do wielokąta) tak, by środki symetrii obu figur nie pokrywały się.

222. Wyznaczyć wszystkie co najwyżej dwucyfrowe liczby n o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej m, której ostatnią cyfrą jest jedynka, dwucyfrowa końcówka liczby n^m jest identyczna z n. (Uwaga: $3 = 03$ itp.)



Rys. 1



Rys. 2

221. (a) Oznaczmy odpowiednio przez S i O środki symetrii danych figur: ściśle wypukłego zbioru Z oraz wpisanego weń wielokąta W. Wybierzmy dowolną parę przeciwległych boków AB i CD wielokąta W. Równoległobok $ABCD$ jest wpisany w figurę Z, a S jest jego środkiem symetrii. Przypuśćmy, że $O \neq S$. Wówczas jedna z przekątnych rownoległoboku $ABCD$ nie przechodzi przez O; bez straty ogólności można przyjąć, że punkty O i B leżą po różnych stronach prostej AC (rys. 1). Oznaczając przez A', B', C' obrazy punktów A, B, C w symetrii środkowej względem O otrzymujemy środkowo-symetryczny sześciokąt $ABCA'B'C'$ wpisany w Z i nie zdegenerowany do czworokąta (co wynika ze ścisłej wypukłości zbioru Z). Punkt D, jako symetryczny do B względem środka odcinka AC, powinien leżeć wewnątrz tego sześciokąta (rys. 2) – nie może więc leżeć na brzegu figury Z; sprzeczność. Zatem $O = S$.

(b) Niech q będzie liczbą dodatnią różną od $1/2$. Weźmy pod uwagę punkty

$$\begin{array}{lll} A = (-1, q, q), & B = (q, -1, q), & C = (q, q, -1), \\ A' = (1, -q, -q), & B' = (-q, 1, -q), & C' = (-q, -q, 1), \\ O = (0, 0, 0), & S = (1, 1, 1). & \end{array}$$

Najmniejszy zbiór wypukły zawierający punkty A, B, C, A', B', C' jest wielościanem; oznaczmy go przez W. Punkt O jest jego środkiem symetrii. Płaszczyzna ABC (o równaiu $x + y + z = 2q - 1$ nie przechodzi przez O, a więc W nie degeneruje się do wielokąta.

W trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej wzór

$$\mathrm{d}((x, y, z), (u, v, w)) = \sqrt[3]{|x-u|^3 + |y-v|^3 + |z-w|^3}$$

określa metrykę, a każda kula (w sensie tej metryki) jest zbiorem ściśle wypukłym oraz środkowo-symetrycznym. Zauważmy teraz, że

$$\mathrm{d}(A, S) = \mathrm{d}(B, S) = \mathrm{d}(C, S) = \sqrt[3]{10 - 6q + 6q^2 - 2q^3} =: r,$$

$$\mathrm{d}(A', S) = \mathrm{d}(B', S) = \mathrm{d}(C', S) = \sqrt[3]{2 + 6q + 6q^2 + 2q^3} =: r'.$$

Jeśli za q przyjmiemy pierwiastek równania $q^3 + 3q = 2$, uzyskamy równość $r = r'$. Wielościan W jest wówczas wpisany w pewną d-kulę o środku S, nie pokrywającym się z O.

222. Szukamy liczb naturalnych $n < 100$ spełniających dla każdej liczby naturalnej k równanie $n^{10k+1} \equiv n \pmod{100}$, czyli

$$n(n^{10k} - 1) \equiv 0 \pmod{100}.$$

Zauważmy, że jeżeli związek ten zachodzi dla $k=1$, to zachodzi dla wszystkich k naturalnych (bo liczba $n^{10k} - 1$ dzieli się przez $n^{10} - 1$). Zadanie sprowadza się do znalezienia wszystkich liczb $n=10x+y$ $(x, y \in \{0,1,\ldots,9\})$ takich, że

$$(1)\quad 0 \equiv n(n^{10}-1) = (10x+y)\left(\sum_{j=0}^{10}\binom{10}{j}(10x)^j y^{10-j} - 1\right) \equiv (10x+y)(y^{10}-1) \pmod{100}.$$

Gdy $y \in \{2,3,7,8\}$, wówczas $y^{10} \equiv 4 \pmod 5$, więc prawa strona (1) nie dzieli się przez 5; brak rozwiązań. Gdy $y \in \{4,6\}$, wówczas $y^{10} - 1 \equiv 75 \pmod{100}$ i dla spełnienia związku (1) potrzeba i wystarcza, by $n=10x+y$ było liczbą podzielną przez 4.
Gdy $y \in \{1,9\}$, wówczas $y^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{100}$ więc każde x jest dobre.
Gdy $y=5$, wowczas $y^{10}-1 \equiv 24 \pmod{100}$ i dla spełnienia (1) potrzeba i wystarcza, by $n=10x+5$ było liczbą podzielną przez 25.
Gdy $y=0$, wówczas $y^{10}-1 \equiv 99 \pmod{100}$ i (1) zachodzi tylko dla $x=0$.

Reasumując: rozwiązaniem równania są wszystkie liczby $n<100$ mające postać $10j \pm 1$ lub $20j \pm 4$ oraz liczby 00, 25, 75.

Zadania z fizyki nr 123, 124

Redaguje Jerzy B. BROJAN

123. Pudełko, z którego wychodzą dwa przewody, zawiera kondensator, opornik i cewkę o pomijalnie małym oporze, połączone w nieznany sposób. Po przyłożeniu napięcia stałego stwierdzono, że opór pudełka wynosi 100 Ω, i taki sam opór wykazuje ono w obwodzie prądu przemiennego bardzo wielkiej częstotliwości. Po przyłożeniu napięcia sinusoidalnego moduł impedancji (zawada) okazał się równy 50 Ω przy częstotliwości 100 Hz i 80 Ω przy częstotliwości 200 Hz. Narysować schemat obwodu i wyznaczyć wartości L i C.

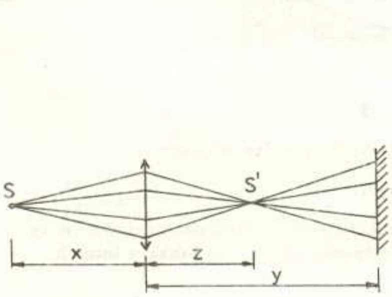
124. Ciecz lepka wypełnia przestrzeń pomiędzy dwoma długimi cylindrami obracającymi się wokół wspólnej osi, przy czym wewnętrzny cylinder ma promień r_1 i prędkość kątową ω_1, a zewnętrzny – promień r_2 i prędkość kątową ω_2. Jakim wzorem wyraża się zależność prędkości cieczy od odległości r od osi $(r_1<r<r_2)$? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny (niezależny od czasu) i laminarny (tzn. „warstwowy", bez zawirowań).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1991

Przypominamy treść zadań:

119. Źródło punktowe S o światłości I znajduje się w odległości x od soczewki skupiającej o ogniskowej f, za którą w odległości y leży ekran prostopadły do osi optycznej. Znaleźć natężenie oświetlenia powierzchni ekranu (jej oświetlonej części).

120. Dane są gęstość cieczy ρ, jej napięcie powierzchniowe σ i masa kropli m. Oznaczmy przez ω_m maksymalną prędkość kątową, jaką można nadać tej kropli w stanie nieważkości, aby nie rozleciała się. Wykazać, że ω_m jest proporcjonalna do $\sqrt{\frac{\sigma}{m}}$ i obliczyć lub ocenić orientacyjnie stałą proporcjonalności.



Rys. 1

119. Poniższe rozwiązanie odnosi się do przypadku, gdy obraz rzeczywisty S' znajduje się przed ekranem (rys.1). Oznaczmy powierzchnię soczewki przez A. Kąt bryłowy, jaki tworzy wiązka wychodząca ze źródła S i wchodząca do soczewki wynosi $\frac{A}{x^2}$, zatem strumień światła tej wiązki jest równy $\frac{IA}{x^2}$. Po przejściu przez soczewkę wiązka skupia się w punkcie S', którego odległość z od soczewki jest dana wzorem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f}, \quad \text{czyli} \quad z = \frac{fx}{x-f}$$

Kąt bryłowy, wewnątrz którego biegnie światło po przejściu przez soczewkę, wynosi $\frac{A}{z^2}$. Dlatego „z punktu widzenia ekranu" możemy potraktować S' jako źródło punktowe o światłości I' związanej z I wzorem

$$\frac{IA}{x^2} = \frac{I'A}{z^2}.$$

Stąd otrzymujemy $I' = If^2/(x-f)^2$ i natężenie oświetlenia ekranu

$$E = \frac{I'}{(y-z)^2} = \frac{If^2}{(yx - f(x+y))^2}.$$

W przypadku obrazu rzeczywistego za ekranem lub pozornego rozumowanie różni się tylko kilkoma szczegółami, a wynik końcowy jest identyczny. Obowiązuje on także dla soczewki rozpraszającej – należy jedynie podstawić ujemną wartość f.

120. Pierwszy punkt jest banalnym przykładem zastosowania analizy wymiarowej, gdyż w zależności

$$\omega_m = f(m, \sigma, \rho)$$

jedyna funkcją f spełniającą zgodność wymiarów

$$\frac{1}{s} = f\left(\mathrm{kg}, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$$

jest funkcja $f = \mathrm{const} \cdot \sqrt{\sigma/m}$ (brak zależności od ρ). Wyznaczenie wartości stałej jest znacznie trudniejsze. Poniżej podajemy skrótowy opis pewnej numerycznej metody znalezienia kształtu obracającej się kropli i obliczenia szukanej stałej.

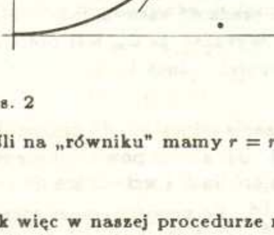
Rozpatrujemy stan równowagi kropli w układzie obracającym się, w którym występuje przyspieszenie odśrodkowe $\omega^2 r$, zatem „ciśnienie odśrodkowe" jest równe $\rho\omega^2 r dr$, a po scałkowaniu $\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$ (gdzie r – odległość od osi obrotu). Ciśnienie cieczy przy jej powierzchni równoważy się z ciśnieniem błonki powierzchniowej, równym $\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, gdzie R_1 i R_2 są to główne promienie krzywizny błonki. Bryłę o symetrii obrotowej wokół osi z przedstawimy w przekroju (rys.2), wtedy jeden z tych promieni jest promieniem krzywizny otrzymanej krzywej, czyli

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{ds},$$

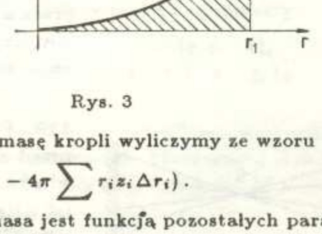
gdzie $d\alpha$ jest zmianą kierunku stycznej przy przesunięciu ds wzdłuż krzywej. Drugi z promieni jest związany z krzywizną przekroju w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku i wynosi $R_2 = r/\sin\alpha$ (por. też w poradnikach matematycznych wzory opisujące krzywiznę powierzchni). Równanie opisujace kształt kropli ma zatem postać

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \sigma\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\sin\alpha}{r}\right),$$

gdzie p_0 – ciśnienie na osi. Wybrawszy wartości parametrów p_0, ρ, ω i σ oraz krok ds możemy scałkować numerycznie powyższe równanie od punktu $r = \alpha = 0$ do „równika" kropli, tzn. punktu $\alpha = \pi/2$. (Nb. zależność $\alpha(r)$ można scałkować analitycznie, ale i tak pozostanie do scałkowania numerycznego $z(r)$). Całkując obliczamy jednocześnie wielkość $4\pi\sum z_i r_i \Delta r_i$ – jest to podwojona objętość części zakreskowanej na rysunku 3, czyli objętość „brakująca" do walca.



Rys. 2



Rys. 3

Jeśli na „równiku" mamy $r = r_1$ i $z = z_1$, to masę kropli wyliczymy ze wzoru

$$m = \rho\left(2\pi r_1^2 z_1 - 4\pi\sum r_i z_i \Delta r_i\right).$$

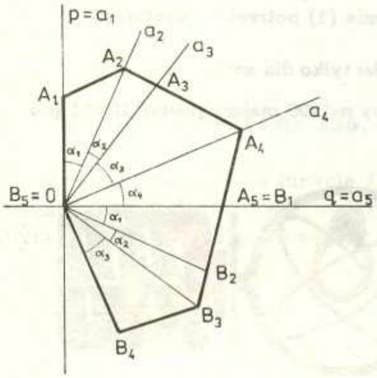
Tak więc w naszej procedurze numerycznej masa jest funkcją pozostałych parametrów, w tym ciśnienia p_0, choć z fizycznego punktu widzenia jest na odwrot: to p_0 jest funkcją innych parametrów, w tym masy.

Jak wynika z analizy wymiarowej, kształt kropli i wszystkie jej cechy są opisane przez jeden bezwymiarowy parametr – innymi słowy, wystarczy zmieniać np. parametr p_0, nadając wartości jednostkowe parametrom ω, σ i ρ. Oznacza to, że jednostką ciśnienia jest $\rho^{1/3}\sigma^{2/3}\omega^{2/3}$, długości $\rho^{-1/3}\sigma^{1/3}\omega^{-2/3}$, a masy $\sigma\omega^{-2}$. Jeśli więc otrzymana masa ma wartość c, to

$$m = c\sigma\omega^{-2}, \quad \text{czyli} \quad \omega = \sqrt{\frac{c\sigma}{m}}.$$

Rachunki numeryczne prowadzą do wniosku, że maksymalną wartością c jest 19,05, $\sqrt{c} = 4,365$. Wartość tę osiąga się przy $p_0 = -0,55$, wtedy $r_1 = 2,35$, $z_1 = 0,49$.

Rozwiązanie zadania M 607.
Załóżmy, co nie zmniejsza ogólności, że wielokąt jest wypukły. Niech p będzie prostą zawierającą jeden z boków, q – prostopadła do niej. Można teraz podzielić wielokąt na trójkąty półprostymi $a_1, a_2, \ldots, a_n = b_1, \ldots, b_n$ w taki sposób, by każda z półprostych leżących w górnej półpłaszczyźnie miała swój prostopadły odpowiednik w dolnej i na odwrót.



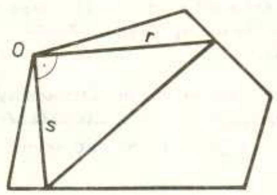
Niech r_i oznacza długość odcinka OA_i, s_i – długość OB_i, α_i – kąt między a_i i a_{i+1}. Pole wielokąta wynosi

$$P = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i r_{i+1}\sin\alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} s_i s_{i+1}\sin\alpha_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\alpha_i(r_i r_{i+1} + s_i s_{i+1}),$$

ale na mocy nierówności Schwartza

$$r_i r_{i+1} + s_i s_{i+1} \le \sqrt{r_i^2 + s_i^2}\sqrt{r_{i+1}^2 + s_{i+1}^2}.$$

Ponieważ średnica wielokąta nie przekracza 1, prawa strona jest nie większa niż 1.



Wtedy

$$P \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\alpha_i.$$

Ponadto $\sin\alpha_i \le \alpha_i$, $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i \le \pi/2$, skąd

$$P \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Uwaga. Oczywiście, wynik pozostaje w mocy dla dowolnej figury o średnicy ≤ 1. Trzeba wtedy obliczać całki, ale dowód jest znacznie prostszy. Jaki?